N° d'ordre 14

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR LE TITRE

D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

par

Gérard LALLEMENT
Ingénieur I. C. M. B.
Licencié es-sciences

PREMIÈRE THÈSE

PROBLÈMES CONCERNANT LE PENDULE DE TORSION ET L'ÉCHAPPEMENT MAGNÉTIQUE

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 12 Mai 1962
devant la Commission d'Examen

MM. R. CHALEAT, Président
P. MESNAGE, F. NAHON } Examinateurs

N° d'ordre 14

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR LE TITRE

D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

par

Gérard LALLEMENT
Ingénieur I. C. M. B.
Licencié es-sciences

PREMIÈRE THÈSE

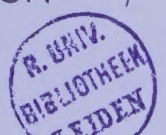
PROBLÈMES CONCERNANT LE PENDULE DE TORSION ET L'ÉCHAPPEMENT MAGNÉTIQUE

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 12 Mai 1962
devant la Commission d'Examen

MM. R. CHALEAT, Président
P. MESNAGE, F. NAHON } Examinateurs



UNIVERSITE
DE
BESANCON

F A C U L T E D E S S C I E N C E S

Doyen Honoraire : M. GLANGEAUD

Professeurs Honoraires : MM. BAILLAUD R., TOURNEUX, TRILLAT, VINCENSINI.

Maître de conférences honoraire : M. GRANIER.

DOYEN : M. JACQUEMAIN : Chimie Appliquée.

ASSESSEUR : M. MESNAGE : Chronométrie.

PROFESSEURS :

MM.	TRONCHET	: Botanique.
	DUFFIEUX	: Physique Générale.
	CHATELET	: Mathématiques.
	PERROT	: Chimie Générale.
	DREYFUSS	: Géologie-Minéralogie.
	THEOBALD	: Paléontologie et géologie stratigraphique.
	CROISOT	: Méthodes mathématiques de la Physique.
	DELHAYE	: Astronomie.
	QUANTIN	: Botanique.
	CHALEAT	: Mécanique Appliquée.
	UEBERSFELD	: Physique.
	RIPPLINGER	: Zoologie.
	NAHON	: Mécanique Générale.
	BERNARD	: Chimie Physique.

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	PHAM MAU QUAN	: Mathématiques
	RIGAL	: Calcul Numérique
	BAILLAUD	: Botanique
	POTIER	: Physique des Solides.
Mme	ROZIS	: Physique
MM.	THIEBAUD	: Géologie Minéralogie
	GOMOT	: Biologie Animale.
	VIENOT	: Physique
	MOTCHANE	: Electronique
	REAL	: Zoologie
	REMOND	: Chargé d'enseignement de la Maîtrise de Conférences de Chronométrie

SECRETAIRE PRINCIPAL : M. LAMBERT

TABLE DES MATIERES

page

Introduction 1

Chapitre 1 : Influence des mouvements parasites de la masse pendulaire sur la période d'un pendule de torsion 4

A - Détermination théorique de la marche

I - Etude dynamique 4

II - Etude cinématique 13

B - Expériences 16

Conclusion - Bibliographie 22

Chapitre 2 : Action mécanique de la lumière

I - Forces radiométriques 23

II - Applications 30

III - Pression de radiation 33

Conclusion - Bibliographie 39

Chapitre 3 : Viscosité de l'air en fonction de la pression 41

- Influence du fluide entraîné sur l'amortissement d'un pendule de torsion - Etude mathématique 43

- Mesure du coefficient de viscosité de l'air 48

Conclusion - Bibliographie 51

Chapitre 4 : Echappement magnétique

Généralités 52

I - Calcul de la fréquence fondamentale de la lame 53

II - Théorie élémentaire du fonctionnement de l'échappement magnétique 66

III - Etude expérimentale 72

Conclusion - Bibliographie 79

-:-:-:-:-:-

PROBLEMES CONCERNANT LE PENDULE DE TORSION ET L'ECHAPPEMENT MAGNETIQUE

-:-:-:-:-

INTRODUCTION

La mesure du temps joue un rôle important dans un grand nombre de recherches scientifiques et de réalisations techniques.

Les étalons mécaniques, lentement perfectionnés, ont atteint un stade remarquable de précision et conduisent à des écarts instantanés de période de quelques 10^{-8} secondes. Très rapidement, les horloges à quartz ont repoussé ces irrégularités ju qu'à 10^{-10} secondes. Aujourd'hui, les résonateurs atomiques assurent une stabilité qu'on espère amener prochainement à 10^{-12} secondes.

Si de nouvelles améliorations ont encore une signification, quelles limites atteindrons-nous demain ?

En regard des possibilités chronométriques actuelles, les régulateurs élémentaires envisagés dans cet exposé paraissent bien désuets. Mais l'utilisation d'ensembles complexes et précis dans le domaine des recherches d'avant-garde ne s'oppose nullement au souci constant de simplification des garde-temps d'usage courant. Les oscillateurs purement mécaniques représentent la solution la plus répandue et leur amélioration demeure un problème d'actualité.

Dans le cadre de divers travaux relatifs au Pendule de Torsion récemment effectuée ou en cours à l'Institut de Chronométrie et de Micromécanique de Besançon, nous nous sommes intéressés ici en premier lieu à l'influence des mouvements parasites sur la période d'un pendule de torsion libre.

Le début du premier chapitre est consacré à l'étude dynamique de l'oscillateur dans le cas d'un fil de suspension parfaitement élastique. La solution cinématique approximative envisagée ensuite sert de base aux expériences. Les dispositifs adoptés sont décrits succintement et nous donnons enfin quelques exemples de relevés résumant l'allure des marches observées.

Le deuxième chapitre concerne l'entretien d'un oscillateur du type précédent par un dispositif photo-mécanique.

Notre première intention était d'utiliser la pression de radiation. La petitesse des forces mises en jeu nécessite en particulier un fil de suspension à très faible frottement interne, et c'est la principale difficulté à laquelle se heurtent les recherches. Nous avons pu effectuer quelques mesures correspondant aux valeurs théoriques prévues (2ème chapitre-2ème partie)

La valeur des résultats dépend en grande partie des dispositions prises afin d'éviter l'effet radiométrique. La connaissance de celui-ci était donc nécessaire. Or, les publications relatives à ce sujet sont assez anciennes et dispersées. Le début du second chapitre traite donc des forces radiométriques. Cette étude est élémentaire, précise, et s'appuie sur de nombreuses expériences.

Nous envisageons ensuite deux applications :

- d'une part, le remontage d'un petit mouvement d'horlogerie au moyen d'un moulinet radiométrique agissant sur le barillet,

- d'autre part, l'entretien d'un pendule de torsion par une ailette sensible sur laquelle agit un faisceau lumineux intermittent.

La faible quantité d'énergie émanant des forces de radiation impose des conditions sévères quant à l'amortissement ; en particulier, nous devons tenir compte du frottement visqueux dû à l'air. La présence d'un vide élevé conduit à de faibles pertes, mais dans quel rapport le décrément global est-il plus faible ? Par ailleurs, il existe une forme géométrique de la masse pendulaire conduisant à un coefficient d'amortissement minimum. La recherche des solutions théoriques approchées concernant l'influence du fluide entraîné sur l'amortissement et des résultats expérimentaux déterminant la variation du coefficient de viscosité de l'air en fonction de la pression fait l'objet du troisième chapitre.

Jusqu'à présent, nous avons considéré des oscillateurs mécaniques à très basse fréquence libres ou entretenus par une liaison non matérielle ; nous avons tenu à compléter cet exposé par l'étude d'un régulateur à fréquence beaucoup plus élevée entretenu par couplage magnétique. Les lames vibrantes ont suggéré de nombreux systèmes électromagnétiques ou électrodynamiques. L'échappement magnétique mis au point par M.CLIFFORD a retenu notre attention.

Le chapitre 4 qui lui est consacré comporte trois parties : le première traite de la fréquence fondamentale de la lame vibrante utilisée dans ce dispositif ; la seconde concerne la théorie élémentaire de ce mécanisme. Les nombreuses approximations ne permettent pas l'examen de la stabilité, mais conduisent à des solutions simples, sources de perfectionnement. Enfin, le compte-rendu des expériences montre qu'il est possible d'obtenir des améliorations du fonctionnement et tout particulièrement de la marche.

Je tiens à assurer de ma gratitude :

Monsieur le Professeur P.MESNAGE, Directeur de l'Institut de Chronométrie et de Micromécanique pour sa haute compétence et l'intérêt qu'il a porté à cet exposé,

Monsieur le Professeur R.CHALEAT, Directeur du Laboratoire de Mécanique appliquée, promoteur de cette étude, pour ses judicieux conseils, sa bienveillance et sa constante vigilance.

J'exprime également mes remerciements :

au personnel de l'Institut de Chronométrie, notamment à M.JOANNIS et à M.COROTTE; MM.PETITJEAN et MAITRE,

à ses collaborateurs du C.N.R.S : Mlle BERTRAND et M.ROY.

à la Société LIP et au Laboratoire de M.GEORGE,

à la Société JAEGER,

qui m'ont apporté une aide précieuse dans la réalisation pratique de ce travail.

-:-:-:-:-:-

INFLUENCE DES MOUVEMENTS PARASITES DE LA MASSE PENDULAIRE SUR LA PERIODE D'UN PENDULE DE TORSION

Le pendule de torsion présente plusieurs avantages sur le balancier circulaire.

1/ L'amplitude normale de fonctionnement est de l'ordre de cent fois supérieure à celle du balancier circulaire.

A puissance réglante égale, la période peut être voisine de la minute.

2/ Une période importante conduit à des résistances visqueuses petites (mouvement laminaire et non plus turbulences) et à une faible consommation d'énergie.

Ainsi, pour des constructions soignées :

- un pendule circulaire ayant une période d'une seconde et une amplitude maxima de 1°30' absorbe une puissance de 10 ergs/sec.

- un pendule de torsion ayant une période de 60 sec et une amplitude maxima de 320° absorbe une puissance de 10^{-1} erg/sec.

Cette faible puissance consommée permet d'entretenir le pendule de torsion au moyen de dispositifs variés : changements de température d'un local, énergie lumineuse ambiante etc...

3/ A amplitude et température constantes (nous entendons par là que ces conditions sont celles d'expériences classiques),

on obtient pour une série d'essais portant sur une durée de un mois une période définie à $\pm 5.10^{-4}$ sec pour T = 60 sec.

soit un $\frac{\Delta T}{T}$ de l'ordre de 10^{-5} .

(construction soignée mais non comparable aux pendules d'Observatoire)

4/ Par contre, le montage classique utilisé dans les horloges rend cet oscillateur très sensible aux vibrations : les moindres chocs provoquent des déplacements et des rotations de la masse pendulaire.

Nous avons essayé de déterminer l'effet de ces mouvements parasites sur la période d'un pendule de torsion (oscillateur JAEGER-ATMOS)

Cette étude comporte deux parties :

A/ détermination théorique de la marche

I - étude dynamique

II - étude cinématique

B/ expériences

A/ Détermination théorique de la marche

I - Etude dynamique

1/ Données du problème.

Soit un fil élastique de longueur $OO' = \ell$ encastré en O_1 dans un bâti fixé. En O', extrémité libre, le fil est encastré en un point de l'axe d'un cylindre à section circulaire constituant la masse pendulaire.

Le centre de gravité G de la masse pendulaire est situé en dessous de O' et le système est étudié pour des positions voisines de l'équilibre stable.

On réalise ainsi un type de pendule conique à fil de suspension élastique.

On se limite à l'étude de mouvements voisins de celui du pendule de torsion, c'est-à-dire grandes rotations autour de l'axe du cylindre, petits déplacements et rotations dans un plan de section droite du cylindre.

2/ Mise en équation

2-1 Energie de déformation du fil de suspension

Ce calcul est basé sur la méthode exposée par J.HAAG dans plusieurs mémoires [1].

a) Rappels de cette méthode [2]:

On considère une aire plane Ω limitée par une courbe fermée, située à l'abscisse curviligne s le long du fil et un système d'axes $H\xi\eta\zeta$ qui lui est associé.

avec H au centre de gravité de Ω
$H\xi$ et $H\eta$ dirigés suivant les axes principaux d'inertie de Ω
$H\zeta$ perpendiculaire aux précédents et tangent à la fibre neutre du fil

La forme du fil est définie par les déplacements et rotations du trièdre précédent quand s varie.

Soient A et B les moments d'inertie de l'aire Ω par rapport à $H\xi$ et $H\eta$ et I le moment d'inertie à la torsion de Ω.

En O' soient $\vec{R}$ et $\vec{C}$ réaction et couple d'encastrement exercés par la masse pendulaire sur le fil.

Soient $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ les projections sur le trièdre fixe $O_1x_1y_1z_1$ du moment résultant des forces et couples exercés sur la partie du fil postérieure à H.

Le travail des forces extérieures appliquées à l'élément HH' de longueur ds est indépendant du trièdre de référence (système des forces appliquées sur HH' équivalent à O) et a pour expression :

$$W_{HH'} = 1/2 \left(\frac{\mathcal{L}^2}{EA} + \frac{\mathcal{M}^2}{EB} + \frac{\mathcal{N}^2}{GI}\right) ds$$

en négligeant les énergies de déformation de traction et de cisaillement et à condition que la déformation totale soit petite.

Avec E et G : modules d'Young et de Coulomb.

- Pour une portion de fil de longueur ℓ :

$$2W = \int_0^{\ell} \left(\frac{\mathcal{L}^2}{EA} + \frac{\mathcal{M}^2}{EB} + \frac{\mathcal{N}^2}{GI}\right) ds \qquad (1)$$

- L'énergie de déformation permet de calculer la déformation locale :

Soient $\vec{R}(X,Y,Z)$ et $\vec{C}(L,M,N)$ en projection sur $O_1x_1y_1z_1$

On suppose que les déformations sont petites et qu'au cours de celles ci le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ est solidaire de $H\xi\eta\zeta$.

Son déplacement résulte des translations ξ, η, ζ et des rotations p_1, q_1, r_1 autour des axes O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1.

Travail virtuel du système :

$$\delta\mathcal{C} = X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta + L dp_1 + P dq_1 + R dr_1$$

W est une forme quadratique homogène en X et L, et

$$dW = \frac{\partial W}{\partial X} dX + \frac{\partial W}{\partial Y} dY + \frac{\partial W}{\partial Z} dZ + \frac{\partial W}{\partial L} dL + \frac{\partial W}{\partial M} dM + \frac{\partial W}{\partial N} dN$$

ou d'après les propriétés des formes polaires :

$$dW = \frac{\partial W}{\partial (dX)} X + \frac{\partial W}{\partial (dY)} Y + \ldots\ldots + \frac{\partial W}{\partial (dN)} N$$

soient $\xi = \frac{\partial W}{\partial X}$,..... , ... $p_1 = \frac{\partial W}{\partial L}$ (2)

Les déplacements de l'extrémité O' seront obtenus en faisant $s = \ell$

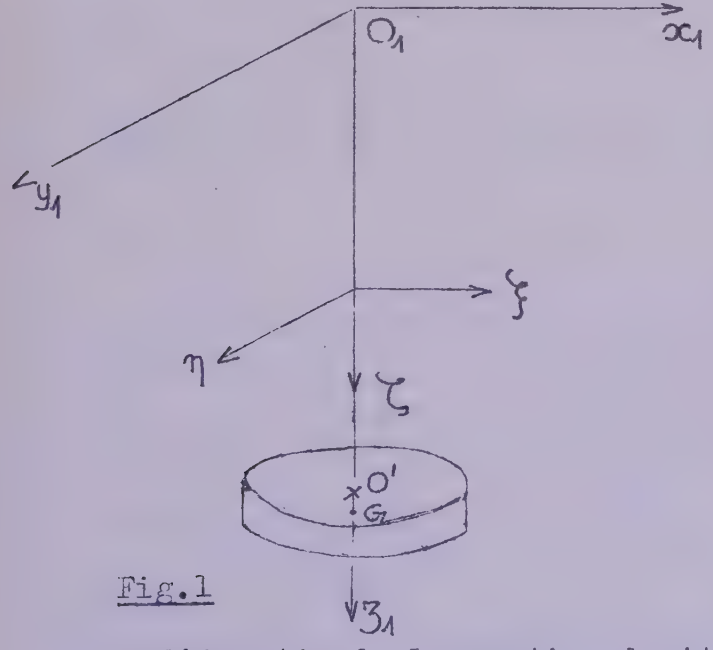


Fig.1

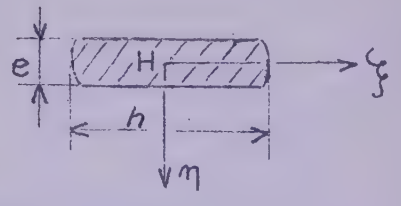
b) Calculs

Trièdre fixe $O_1x_1y_1z_1$ passant par l'encastrement supérieur O_1z_1 suivant O_1O' (pendule au repos) (fig.1)

Fil de suspension

longueur $O_1O' = \ell$

section rectangulaire



A moment d'inertie de la section droite par rapport à $H\xi$

B " " " " " " $H\eta$

I " " à la torsion

Avec les notations précédentes et $\overline{OH} = z$

moment fléchissant en H : $\overrightarrow{Mf_H} = \vec{C} + \overrightarrow{HO'} \wedge \vec{R}$

soit $\overrightarrow{\mathfrak{m}f_H}$: $(\mathcal{L} = L - Y(\ell - z)\ ;\ \mathcal{M} = M + X(\ell - z)\ ;\ \mathcal{N} = N)$ (3)

Energie de déformation du fil.

$$2W = \frac{1}{E}\left[\frac{L^2\ell + Y^2\ell^3/3 - LY\ell^2}{A} + \frac{N^2\ell + X^2\ell^3/3 + MX\ell^2}{B}\right] + \frac{N^2\ell}{GI} \qquad (4)$$

Déplacements et rotations élémentaires en O'

D'après (2)

$$\xi = \frac{\ell^3 X}{3EB} + \frac{\ell^2 N}{2EB} \qquad p_1 = \frac{L\ell}{EA} - \frac{\ell^2 Y}{2EA}$$

$$\eta = \frac{\ell^3 Y}{3EA} - \frac{\ell^2 L}{2EA} \qquad q_1 = \frac{\ell M}{EB} + \frac{\ell^2 X}{2EB}$$

$$\zeta = 0 \qquad r_1 = \frac{\ell N}{GI}$$

W est une forme quadratique définie positive homogène en X, Y, L, M et N.

Nous cherchons maintenant la forme adjointe W_1 de W en ξ, η, p_1, q_1 et r_1

$$W(X_i) \rightarrow W_1(\xi_i) \quad \text{avec} \quad \xi_i = 1/2\ \frac{\partial 2W(X_i)}{\partial (X_i)}$$

On obtient finalement tous calculs faits :

$$2W_1 = \frac{EAB}{\ell^3}\left[\frac{12\xi^2}{A} + \frac{12\eta^2}{B} + \frac{12\ell\eta p_1}{B} - \frac{12\ell\xi q_1}{A} + \frac{4\ell^2 q_1^2}{A} + \frac{4\ell^2 p_1^2}{B} + \right.$$

$$\left. + \frac{\ell^2 r_1^2 GI}{EAB}\right] \qquad (5)$$

Résultat établi dans le cas d'un fil plat.

Dans le cas d'un fil de section circulaire A = B

$$2W_1 = \frac{EA}{\ell^3}\left[12\xi^2 + 12\eta^2 + 12\ell\eta p_1 - 12\ell\xi q_1 + 4\ell^2 p_1^2 + 4\ell^2 q_1^2 + \ell^2 r_1^2 \frac{GI}{EA}\right] \quad (5')$$

2-2- Energie cinétique

Elle est élaborée en observateurs fixes par l'intermédiaire du théorème de Koenig.

Définissons les paramètres déterminant le mouvement de la masse pendulaire autour de son centre de gravité [3].

Il est très mal commode d'utiliser les angles d'Euler (fig.2A) La rotation propre de la masse pendulaire est grande et celles dûes aux mouvements parasites toujours petites.

Angles d'Euler

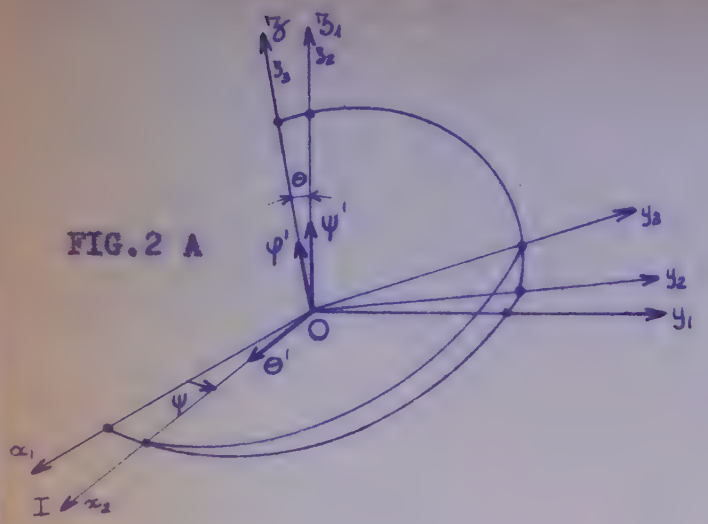


FIG.2 A

Angles choisis

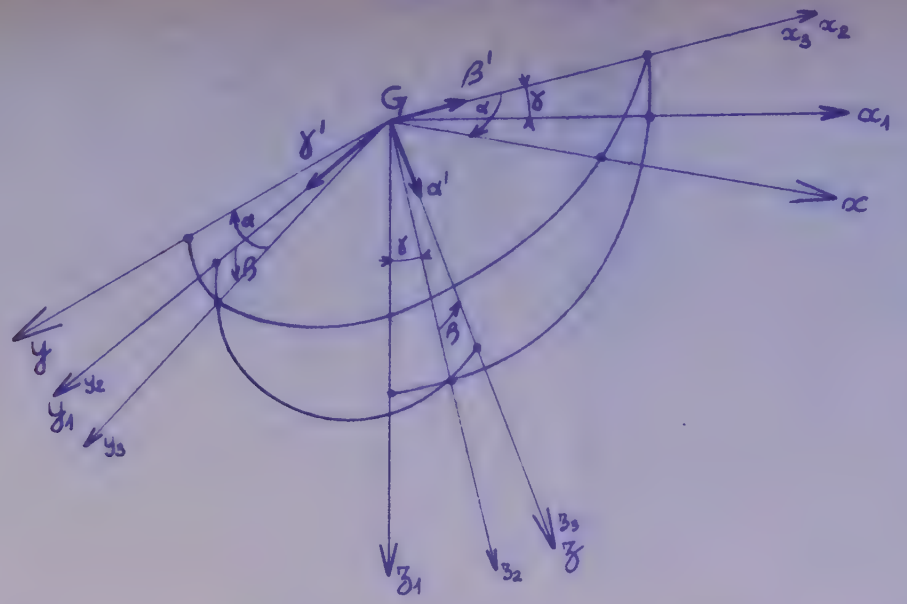


FIG.2 B

Rotation instantanée en projection sur $Gxyz_1$: $\left(p'_1 = \beta'\cos\gamma + \alpha'\cos\beta\sin\gamma\ ,\ q'_1 = \gamma' - \alpha'\sin\beta\ ,\ r'_1 = \alpha'\cos\beta\cos\gamma - \beta'\sin\gamma\right)$

" " " " " Gxyz : $\left(p' = \beta'\cos\alpha + \gamma'\cos\beta\sin\alpha\ ,\ q' = -\beta'\sin\alpha + \gamma'\cos\beta\cos\alpha\ ,\ r' = \alpha' - \gamma'\sin\beta\right)$

Cosinus directeurs

	Gx_1	Gy_1	Gz_1
G_x	$\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$	$\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma$
Gy	$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma$
Gz	$\cos\beta\sin\gamma$	$-\sin\beta$	$\cos\beta\cos\gamma$

Les paramètres d'Euler définissent : Θ nutation, Ψ précession et φ rotation propre.

Pour Θ voisin de 0 la ligne des noeuds I n'est plus déterminée. On obtient alors : $\Psi + \varphi = (\widehat{Ox_1, Ox})$ ou encore rotation instantanée autour de Oz_1 définie par $\Psi' + \varphi'$ d'où indétermination.

Nous utilisons des angles qui restent petits et bien déterminés lorsque les 2 trièdres sont voisins (fig.2B)

On passe de $Gx_1y_1z_1$ repérant le mouvement autour du centre de gravité à Gxyz lié à la masse pendulaire par 3 rotations

γ autour de Gy_1 amène $Gx_1y_1z_1$ en $Gx_2y_1z_2$

β autour de Gx_2 amène $Gx_2y_1z_2$ en Gx_2y_3z

α autour de Gz amène Gx_2y_3z en Gxyz

Vitesse du centre de gravité

Dans la position d'équilibre stable (au repos) $\overrightarrow{OG} = a$
$\overrightarrow{O_1O'} = \ell$

Après déformation

$$\overrightarrow{O_1O'}_{def} = \overrightarrow{O_1O'}_{repos} + \overrightarrow{D_{O'}} + \overrightarrow{O_1O'} \wedge \overrightarrow{\Omega_{O'}}$$

Avec $\overrightarrow{D_{O'}}(\xi, \eta, 0)$ et $\overrightarrow{\Omega_{O'}}(p_1, q_1, r_1)$

Soit $\overrightarrow{O_1O'}$ (en projection sur $O_1x_1y_1z_1$) : $\left[\xi + q_1\ell ; \eta - p_1\ell ; \ell\right]$

$\overrightarrow{O'G}_{(Gxyz)}$: $(0, 0, a-\ell)$

$\overrightarrow{O'G}_{O_1x_1y_1z_1}$: $\left[(a-\ell)\cos\beta\sin\gamma ; -(a-\ell)\sin\beta ; (a-\ell)\cos\beta\cos\gamma\right]$

Nous envisageons seulement α_{maxi} grand, β et γ toujours petits.

$$\overrightarrow{O_1G}(O_1x_1y_1z_1) : \left[\xi + q_1\ell + (a-\ell)\cos\beta\sin\gamma ; \eta - p_1\ell - (a-\ell)\sin\beta ; \ell + (a-\ell)\cos\beta\cos\gamma\right] \qquad (6)$$

Energie cinétique dans le mouvement autour de G

La masse pendulaire est constituée par un anneau de révolution autour de Gz; Gx et Gy sont axes principaux d'inertie.

Soient C son moment d'inertie par rapport à Gx et Gy, D son moment d'inertie par rapport à Gz et M sa masse.

$$2T_G = C(p'^2 + q'^2) + Dr'^2 \qquad (7)$$

Energie cinétique totale

$$2T = M\left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)^2 + 2T_G \qquad (8)$$

Fonction de force pour la pesanteur

$$U = Mg\,a \tag{9}$$

3/ Equations du mouvement

3-1 première approximation

$$\vec{\Omega}'(Gxyz):\left[p' = \beta'\cos\alpha + \gamma'\sin\alpha;\ q' = -\beta'\sin\alpha + \gamma'\cos\alpha;\ r' = \alpha'\right] \tag{10}$$

$$\vec{\Omega}'(Gx_1y_1z_1):\left[p'_1 = \beta';\ q'_1 = \gamma';\ r'_1 = \alpha'\right] \tag{11}$$

$$2T = M\left[\xi'^2 + \eta'^2 + a^2\gamma'^2 + a^2\beta'^2 + 2a\xi'\gamma' - 2a\eta'\beta'\right] + C\left[\beta'^2 + \gamma'^2\right] + D\alpha'^2 \tag{12}$$

Nous écrivons les équations de Lagrange relatives aux différentes variables.

Soient :

$$\begin{cases} M(\xi'' + a\gamma'') = \dfrac{EB}{\ell^3}(6\ell\gamma - 12\xi) \\ M(\eta'' - a\beta'') = \dfrac{EA}{\ell^3}(-6\ell\beta - 12\eta) \\ (Ma^2+C)\gamma'' + Ma\xi'' = \dfrac{EB}{\ell^3}(-4\ell^2\gamma + 6\ell\xi) \\ (Ma^2+C)\beta'' - Ma\eta'' = \dfrac{EA}{\ell^3}(-6\ell\eta - 4\ell^2\beta) \\ D\alpha'' + \dfrac{GI}{\ell}\alpha = 0 \end{cases}$$

Introduisons les pulsations propres

On pose (12') $\omega_X^2 = \dfrac{3EB}{M\ell^3}$; $\omega_Y^2 = \dfrac{3EA}{M\ell^3}$

$$\omega_L^2 = \frac{EA}{\ell(C+Ma^2)} \quad ; \quad \omega_M^2 = \frac{EB}{\ell(C+Ma^2)} \quad ; \quad \omega_N^2 = \frac{GI}{\ell D} \quad ; \quad \frac{Ma}{Ma^2+C} = \frac{1}{k}$$

a) rotation propre

$$D\alpha'' + \frac{GI}{\ell}\alpha = 0 \qquad \alpha'' + \omega_N^2\alpha = 0 \qquad \alpha = \alpha_0\cos\omega_N t \tag{13}$$

pas de perturbation sur l'oscillateur en première approximation

b) résolution du système formé par les 4 premières équations

$$(14)\begin{cases} \xi'' + a\gamma'' = 2\omega_X^2(\ell\gamma - 2\xi) \\ \dfrac{\xi''}{k} + \gamma'' = \dfrac{2\omega_M^2}{\ell}(3\xi - 2\ell\gamma) \end{cases}$$

les variables se séparent deux à deux.

On passe formellement du premier groupe au second en changeant γ en β et ξ en $-\eta$.

$$\left.\begin{aligned} \eta''-a\beta'' &= 2\omega_Y{}^2(-\ell\beta-2\eta) \\ -\frac{\eta''}{k}+\beta'' &= \frac{2\omega_L{}^2}{\ell}(-3\eta-2\ell\beta) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Nous n'examinons donc qu'un groupe. En supposant l'existence d'une solution sinusoïdale en ξ et γ de pulsation ω, nous obtenons l'équation aux pulsations propres

$$(-\omega^2+4\omega_X{}^2)(-\omega^2+4\omega_N{}^2) - (+\frac{\omega^2}{k}+\frac{6\omega_M{}^2}{\ell})(a\omega^2+2\ell\omega_X{}^2) = 0 \qquad (16)$$

d'où ω'_1 et ω''_1 en ξ et γ et ω'_2 et ω''_2 en η et β

Remarque : Nous pouvons simplifier ces résultats sans changer la forme générale.

Examinons les ordres de grandeur.

$D \simeq MR^2$ R rayon de la serge de la masse pendulaire

$R = 4,2$ $\quad D \simeq 20\ M$

$a \simeq \ell$ et $\ell \simeq 12$ $\quad Ma^2 \simeq 150\ M$

et $a > \ell$ $\quad C \simeq \frac{MR^2}{2}$ $\quad$ et $Ma^2 > 10\ C$

soit approximativement

$$\left.\begin{aligned} \xi''+a\gamma'' &= 2\omega_X{}^2(\ell\gamma-2\xi) \\ \xi''+a\gamma'' &= \frac{2\omega_X{}^2}{a}(\ell\xi-\tfrac{2}{3}\ell^2\gamma) \end{aligned}\right. \qquad (14')$$

$$\left.\begin{aligned} \eta''-a\beta'' &= 2\omega_Y{}^2(-\ell\beta-2\eta) \\ \eta''-a\beta'' &= \frac{2\omega_Y{}^2}{a}(\ell\eta+\tfrac{2}{3}\ell^2\beta) \end{aligned}\right. \qquad (15')$$

qui conduit à $\omega'_1{}^2 = \omega''_1{}^2 = \omega_1{}^2 = \dfrac{\omega_X{}^2\ell^2}{\ell^2+3a^2+3a\ell}$

soit :

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \cos(\omega_1 t-\varphi_1) \\ \gamma &= \gamma_0 \cos(\omega_1 t-\varphi_2) \end{aligned}\right. \qquad (17)$$

et $\omega'_2{}^2 = \omega''_2{}^2 = \omega_2{}^2 = \dfrac{\omega_Y{}^2\ell^2}{\ell^2+3a^2+3a\ell}$

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \eta_0 \cos(\omega_2 t-\varphi_3) \\ \beta &= \beta_0 \cos(\omega_2 t-\varphi_4) \end{aligned}\right. \qquad (18)$$

d'où : $\omega_1{}^2 = K\,\omega_X{}^2$

$\omega_2{}^2 = K\omega_Y{}^2$

et les relations :

$$\gamma_o = \xi_o \frac{3(\ell+2a)}{3a\ell+2\ell^2}$$

$$\beta_o = \eta_o \frac{3(\ell+2a)}{3a\ell+2\ell^2} \qquad (19)$$

Pour un fil de section circulaire :

$$A = B \qquad \omega_Y^2 = \omega_X^2 \; ; \; \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

3-2 . Deuxième approximation

Nous envisageons maintenant :

$$\vec{\Omega}'_{Gxyz} : \left[p' = \beta' \cos\alpha + \gamma' \sin\alpha \; ; \; q' = -\beta' \sin\alpha + \gamma' \cos\alpha \; ; \; r' = \alpha' - \gamma'\beta \right] \qquad (20)$$

$$\vec{\Omega}'_{Ox_1y_1z_1} : \left[p'_1 = \beta' + \alpha'\gamma \; ; \; q'_1 = -\alpha'\beta + \gamma' \; ; \; r'_1 = \alpha' - \beta'\gamma \right] \qquad (21)$$

soit $2T = M\left[\xi'^2 + \eta'^2 + a^2\gamma'^2 + a^2\beta'^2 + 2a\xi'\gamma' - 2a\eta'\beta' + \ell^2\alpha'^2(\beta^2+\gamma^2)\right.$

$\left. + 2\ell\alpha'(-\xi'\beta - \eta'\gamma - a\gamma'\beta + a\beta'\gamma)\right] + C(\beta'^2 + \gamma'^2) + D(\alpha'^2 + \gamma'^2\beta^2 - 2\alpha'\gamma'\beta) \qquad (22)$

Les mouvements parasites en ξ , η et β, γ ne sont plus représentés par une sinusoïde pure. Nous supposons qu'ils conservent les formes précédentes (17 et 18) et nous ne considérons que les termes perturbateurs de l'équation en α.

L'équation de Lagrange en α s'écrit :

$$D\alpha'' + \frac{GI}{\ell}\alpha = -Ma\ell(\beta''\gamma - \gamma''\beta) + M\ell(\xi''\beta + \xi'\beta' + \eta''\gamma + \eta'\gamma') + D(\gamma''\beta + \gamma'\beta')$$
$$- M\ell^2\alpha''(\beta^2+\gamma^2) - M\ell^2\alpha'(2\beta\beta' + 2\gamma\gamma') \qquad (23)$$

Peuton considérer le second membre comme un ensemble de couples perturbateurs . Cherchons l'ordre de grandeur des différents termes.

On se reporte à :

$\alpha'' + \omega_N^2\alpha = \lambda\, \omega_N^2 f(\alpha, \alpha' t...)$, équation générale de l'oscillateur perturbé;

λ facteur de réglage jouant le rôle d'infiniment petit principal.

γ_o et $\beta_o < 10^{-2}$ radians (pour éviter un choc entre le tube porte-cheville et le fil.)

$\omega_N \simeq 10^{-1}$ $\qquad$ $\omega_N^2 \simeq 10^{-2}$

$\alpha_o \simeq 2\pi$ $\qquad$ ξ_o et $\eta_o \simeq 0{,}1$ cm $\qquad$ ω_1 et $\omega_2 \simeq 2\pi$

Au second membre, les deux premiers termes sont voisins de 10^{-2} c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de ω_N^2 et les autres respectivement voisins de 10^{-3}, 10^{-4} et 10^{-3}.

La méthode d'Airy semble ne pas être valable pour ce second membre. Mais nous savons expérimentalement que la période réelle est toujours voisine de celle de l'oscillateur non perturbé.

Les perturbations effectives sont petites et le procédé correct.

Formule d'Airy :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T^2}{2\pi^3 \alpha_o D} \int_0^{2\pi} P \cos \omega_N t \, d(\omega_N t) \qquad (24)$$

1/ Appliquée aux trois premiers termes :

a) $\beta''\gamma - \gamma''\beta = \frac{\beta_o \gamma_o}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2)\left[\cos\left[(\omega_1+\omega_2)t - \varphi_2+\varphi_4\right] + \cos\left[(\omega_1-\omega_2)t - (\varphi_2-\varphi_4)\right]\right]$

- si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$\omega \simeq n\,\omega_N$ puisque $n > 60$ $\qquad \frac{\Delta T}{T} = 0$

$\omega \simeq \frac{m}{N}\omega_N$ avec $\frac{m}{N}$ irreductible, m et N pas trop grands: $\qquad \frac{\Delta T}{T} = 0$

- si $\omega_1 \neq \omega_2$ on a ici $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{h}{e}$

On peut de toute façon faire le même raisonnement que précédemment et $\frac{\Delta T}{T} = 0$

b) $\xi''\beta + \xi'\beta'$

si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ $\qquad \xi''\beta + \xi'\beta' = -\omega^2 \xi_o \beta_o \cos\left[2\omega t - (\varphi_1+\varphi_4)\right]$

donc : $\frac{\Delta T}{T} = 0$

si $\omega_1 \neq \omega_2$, on est conduit à une somme de termes en $\cos(\omega_1+\omega_2)$ et $\cos(\omega_1-\omega_2)$: $\frac{\Delta T}{T} = 0$

c) on obtient les mêmes conclusions pour $\eta''\delta + \eta'\delta'$ et $\delta''\beta + \delta'\beta'$

2/ Appliquée aux deux derniers termes.

$\left.\begin{array}{l} \alpha''(\beta^2+\delta^2) \\ \alpha'(\beta\beta'+\delta\delta') \end{array}\right\}$ chaque terme est de la forme :

$\cos\left[\omega_N t(1+2n) - \varphi_4\right] + \cos\left[\omega_N t(2n-1) - \varphi_4\right]$

Il en résulte un $\frac{\Delta T}{T}$ égal à zéro.

En résumé :

Les perturbations de période dans les cas simples que nous avons schématisés sont nulles au second ordre près.

Elles sont donc négligeables dans tous les cas (où une stabilité effective du mouvement existe)

II - ETUDE CINEMATIQUE

1/ Considérons maintenant le pendule de torsion comme un pendule sphérique à rotation propre autour de son fil de suspension.

Ce dernier est supposé sans raideur autour de Ox et Oy et nous envisageons seulement les petits mouvements à fil tendu.

Ils sont de deux types distincts (fig.3)

a) mouvement pendulaire autour de O_1

Soit pour le centre de gravité G :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \cos(\Omega_o t - \psi_1) \\ y_1 &= Y_1 \cos(\Omega_o t - \psi_2) \end{aligned} \qquad (25)$$

avec $\Omega_o^2 = \frac{Mga}{I_1}$ $\qquad I_1 = Ma^2 + I_{Gx}$

G décrit une ellipse tournant lentement autour de son axe (cf. étude complète du pendule sphérique) [4]

b) mouvement pendulaire autour de O'

En prenant le système d'axes mobiles précédent en O' on observe des mouvements de forme :

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_o \cos(\Omega_1 t - \psi_3) \\ \gamma &= \gamma_o \cos(\Omega_1 t - \psi_4) \end{aligned} \qquad (26)$$

avec $\Omega_1^2 = \frac{Mg(a-\ell)}{I_2}$ $\qquad I_2 = M(a-\ell)^2 + I_{Gx}$

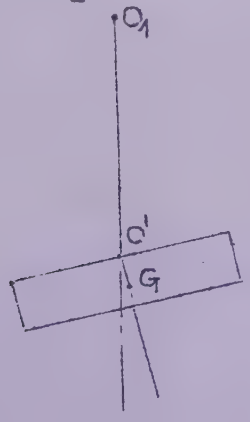


Fig:3

Pratiquement, seuls ces deux types de mouvement existent. Lorsqu'on communique un choc au pendule, on remarque effectivement que le mouvement du type 1 s'effectue dans un plan ou selon une ellipse de direction sensiblement fixe pendant la durée de l'observation.

Par contre, le mouvement du type 2 a lieu dans un système d'axes solidaire de la masse pendulaire et tourne avec l'ensemble autour de O_1z_1.

Expérimentalement $T_o \simeq 0{,}75$ sec et $T_1 \simeq 0{,}3$ sec.

2/ Influence de ces mouvements sur la fonction de dégagement dans le cas du pendule "ATMOS-JAEGER"

Sur la masse pendulaire est fixé un long tube dirigé vers l'encastrement supérieur O_1.

Ce tube porte un étrier sur lequel est monté un cylindre qui assure la liaison de l'oscillateur avec l'ancre du mouvement.

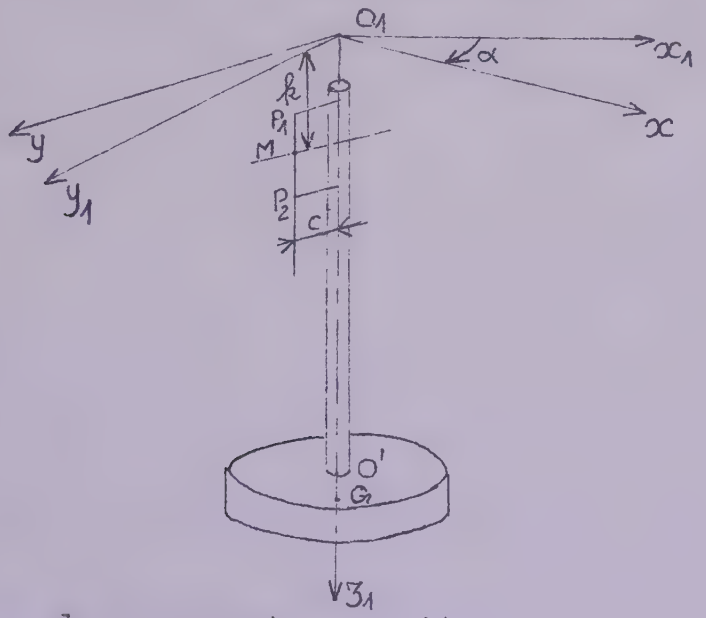


Fig.4

Nous schématisons le cylindre par la génératrice P_1P_2. Soit M_2 le point de P_1P_2 qui vient en contact avec M_1 fixe et solidaire de la fourchette d'ancre pendant le dégagement (fig.4)

2-1 : Pas de mouvements parasites.

$\overrightarrow{OM_2}\ (O_1xyz)\ [0\ ;\ c\ ;\ k]$

On suppose M_1 situé dans $O_1y_1z_1$ vers $O_1y_1 > 0$

$\overrightarrow{O_1M_2}\ (O_1x_1y_1z_1) : [-c \sin\alpha\ ;\ c\cos\alpha\ ;\ k]$

On a fonction de dégagement lorsque la projection de $\overrightarrow{O_1M_2}$ sur O_1x_1 est nulle, c'est-à-dire :

$$-c \sin\alpha = 0$$

ou $\sin\alpha = 0$ et $c\cos\alpha > 0$

La rotation propre du pendule est définie par : $\alpha = \alpha_o \cos \omega_N t$

$\alpha = 0 \longrightarrow \omega_N t = \pi/2 + k\pi \qquad t_1 = T/4\ ,\ t_2 = 3T/4$ etc...

$\alpha = \pi \longrightarrow$ solution à éliminer

2-2. Existence de mouvements parasites.

Hypothèse : Le contact pendant le dégagement se fait toujours entre les points M_1 et M_2 (sur la même génératrice et à la même cote)

Nous pouvons alors calculer la position de $\overrightarrow{OM_2}$ en présence de mouvements parasites. Connaissant les projections de $\overrightarrow{OM_2}$ sur le trièdre fixe, on cherche à quel instant la composante de $\overrightarrow{OM_2}$ suivant $\overrightarrow{Ox_1}$ s'annule (de la même façon que ci-dessus).

Ce procédé théoriquement exact n'a aucun sens pour le problème posé. En effet, le dégagement de la roue d'ancre n'a pas lieu au premier contact entre la fourchette et le cylindre, l'énergie cinétique des mouvements parasites du cylindre étant bien inférieure à celle de la rotation propre de la masse pendulaire au moment du dégagement. Il y a succession de chocs élastiques entre le cylindre et la fourchette et le dégagement ne s'effectue qu'au bout du $n^{ième}$ choc, lorsque α est suffisamment voisin de l'angle α_1 correspondant au dégagement.

(Ordres de grandeur :

Energie cinétique de la rotation propre du pendule au moment du dégagement $\simeq$ 8M.

Energie cinétique maximum des mouvements parasites $\simeq$ 0,4M)

Les perturbations de périodes dûes aux mouvements parasites sont dûes à plusieurs phénomènes :

a) le dégagement effectif se produit pour $\alpha_1 \pm \Delta\alpha$ il en résulte donc une variationde période que je qualifie de "cinématique".

Elle n'est pas chiffrable de manière théorique comme on l'a vu plus haut. On doit pouvoir déterminer son ordre de grandeur par examen de l'échappement complet en fonctionnement.

Nous ne pensons pas qu'il soit supérieur au dixième de seconde.

b) la variation de la position du début du dégagement entraîne une variation de marche dûe à l'échappement.

Nous pouvons l'évaluer par la formule d'Airy

Si $\Delta\alpha \simeq 1°$ et $\alpha_2 - \alpha_1$, angle de dégagement, $\simeq 4°$

On obtient : $$\frac{\frac{\Delta T}{T} \text{ dû à } \Delta\alpha + \alpha_1}{\frac{\Delta T}{T} \text{ dû à } \alpha_1} \simeq 1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}$$ donc, une variation toujours très petite

c) les déplacements du cylindre entraînent une modification des bras de levier intervenant dans la transmission des efforts. Il en résulte une variation du couple résistant pendant le dégagement et du couple moteur pendant l'impulsion.

La perturbation de période correspondante peut s'évaluer en faisant intervenir la théorie des impulsions instantanées après avoir déterminé les variations de vitesse angulaire des organes.

Avec les données numériques employées au cours de cette étude on obtient un $\frac{\Delta T}{T}$ de l'ordre de quelques millièmes de seconde.

B - EXPERIENCES

Elles ont été effectuées sur un pendule de torsion type ATMOS JAEGER avec oscillateur non entretenu.

I Caractéristiques.

Masse pendulaire ; matière : laiton
Anneau de ∅ extérieur 87 mm ; hauteur : 22 mm
$D_{Oz} \simeq 3.10^{3}$ CGS

M totale : 260 g

Fil de suspension: élinvar stabilisé.
Coefficient de dilatation 8.10^{-6}
Section rectangulaire e ≃ 0,05 mm
h ≃ 0,183 mm
GI_o expérimental : $3,3.10^{2}$ dynes cm rad/cm de longueur

longueur utile 125 mm = ℓ
Tube porte-cheville ∅ intérieur 1,5mm ℓ' = 100 mm
soit γ_o ou β_o maxi ≃ $7,5.10^{-3}$ rad.

Période T_N = 60 sec ; $\alpha_o \simeq 300°$

II - Appareillage de mesure

1/ Mesure de période

Procédé photo-électrique : réflexion d'un faisceau lumineux mince sur un miroir plan solidaire du tube porte-cheville ; impulsions positives sur une photo-diode OAP 12 lors du passage au point mort. Le signal est amplifié puis mis en forme afin d'obtenir un front raide. Ce dispositif construit par M.COROTTE, Assistant de Chronométrie, assure un temps de montée inférieur à 10^{-6} secondes. Un compteur Rochar type A 479 utilisé en périodemètre donne T_N à 5.10^{-5} secondes près.

La mise au zéro est manuelle, et nous ne pouvons mesurer qu'une période sur deux. Un écran mobile permet de masquer la cellule pendant l'impulsion correspondant à T/2.

2/ Mesure d'amplitude.

Un index solidaire de la masse pendulaire se déplace devant un disque gradué en degrés. La lecture est faite à ± 1/2 degré en l'absence de tout mouvement parasite.

3/ Mesure de température et isolation des vibrations.

Le pendule et le dispositif optique sont placés sur un socle massif en béton. L'oscillateur est abrité par une cloche de verre reposant sur des joints en caoutchouc.

Le lancement peut s'effectuer de l'extérieur.

Cet ensemble est placé dans une pièce à température constante. Alimentations, oscilloscope et compteur électronique se trouvent dans une pièce voisine afin d'éviter toute augmentation de la température ambiante.

Pendant une série de mesures, on peut assurer un $\Delta T° < 0,2°$. L'ensemble des expériences ayant porté sur plusieurs mois, la température dans l'enceinte du pendule a subi des variations maxima de $\pm$ 1° autour d'une température moyenne de 24°.

4/ Précautions élémentaires.

4-1. Le circuit de mise en forme nous a donné entière satisfaction au cours de nos mesures. Il a fonctionné pendant un minimum de 300 heures sans aucune défaillance.

4-2. L'encastrement glissant du réglage précis de la période a été remplacé dès les premiers essais par un montage rigide à plaquette de serrage. Nous ne mettons pas en doute son efficacité mais il présente pour des mesures précises une cause d'erreur importante.

4-3. Toute mesure doit s'effectuer après un fonctionnement du pendule de plusieurs heures, permettant une stabilisation des caractéristiques du fil (ΔT_N, lors de la mise en marche, de l'ordre de 2 à 3.10^{-2} sec.)

4-4. Positionnement de la cellule.

Nous n'opérons pas à amplitude constante. Le déclenchement du compteur doit se faire exactement au passage au point mort ($\alpha = 0$) si nous voulons obtenir le T_N réel.

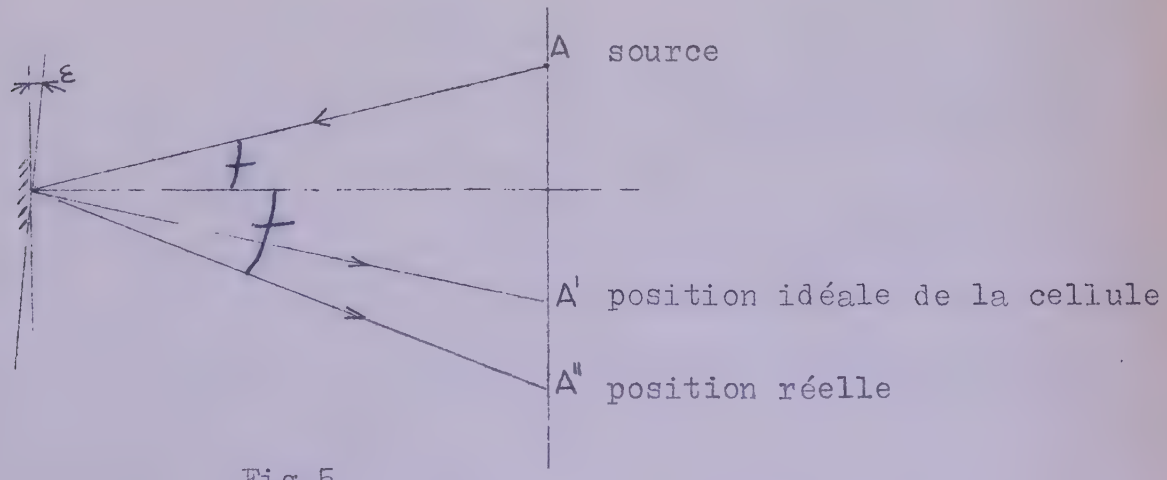


Fig.5

Supposons que le faisceau lumineux atteint la cellule pour $\alpha = \varepsilon$ (fig.5)

$$\alpha = \alpha_o \cos \omega_N t \quad ; \quad T_N = \frac{2\pi}{\omega_N}$$

Au déclenchement du compteur :

$$t_1 = \frac{T_N}{2\pi} \text{ arc cos } \frac{\varepsilon}{\alpha_o}$$

après une période

$$t_2 = T_N + \frac{T_N}{2\pi} \text{ arc cos } \frac{\varepsilon}{\alpha 1}$$

soit T_N' mesuré $\doteq t_2 - t_1 = T_N + \frac{T_N}{2\pi} (\text{arc cos } \frac{\varepsilon}{\alpha_1} - \text{arc cos } \frac{\varepsilon}{\alpha_o})$

avec $\alpha_1 = \alpha_o - \Delta\alpha$

$\Delta\alpha$ perte d'amplitude pour une période

Calculons $\Delta T = T_N - T_N'$

Impulsion de déclenchement : $\varepsilon = \alpha_o \cos \omega_N t_1$

Impulsion d'arrêt :

$$\varepsilon = \alpha_o e^{-\alpha^*(T_N+\Delta T)} \cos \omega_N (t_1 + T_N + \Delta T_N) \qquad \alpha^* T = \delta$$

soit :

$$\cos \omega_N t_1 \simeq e^{-\alpha^* T_N} \cos \omega_N (t_1 + T_N + \Delta T_N)$$

$$\cos \omega_N t_1 (1 - e^{-\alpha^* T_N}) \simeq -e^{-\alpha^* T_N} \omega \Delta T_N \sin \omega_N t_1$$

$$\text{et } \Delta T_N \simeq -\frac{\alpha^* T_N^2}{2\pi} \text{ cotg } \omega_N t_1$$

$$T_N \simeq -\frac{\delta T_N}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\theta_o} \qquad (27)$$

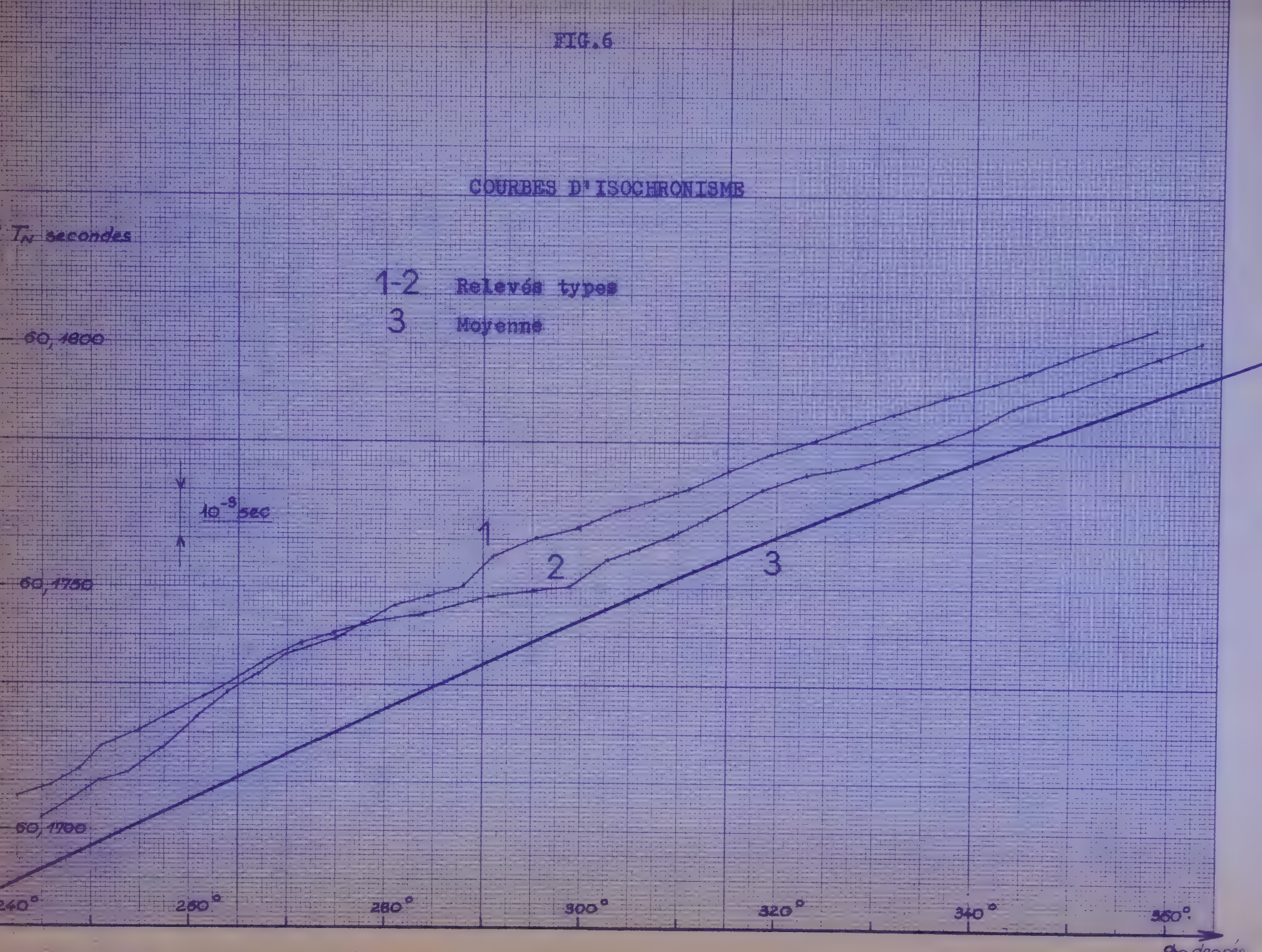
Pour chaque série d'essais, on a procédé au réglage précis de la position de la cellule par mesure de 2 demi-périodes consécutives.

L'écart maximum admis est de 10^{-3} sec.

Si le temps de passage correspondant à la distance A'A" est de 5.10^{-4} sec on a $\varepsilon \simeq 1,6.10^{-4}$ rad avec $\theta_o \simeq 2\pi$

Pour $\delta \simeq 7.10^{-3}$ on obtient $\Delta T_N \simeq 2.10^{-6}$, erreur négligeable pour les mesures envisagées.

FIG.6


COURBES D'ISOCHRONISME
T_N secondes
1-2 Relevés types
3 Moyenne
60, 1800
60, 1750
60, 1700
10^{-3} sec
1
2
3
240°
260°
280°
300°
320°
340°
360°

III - Relevés expérimentaux.

RELEVES EXPERIMENTAUX

1/ Mesure du défaut d'isochronisme (fig.6)

Sa connaissance est nécessaire pour l'interprétation des essais avec mouvements parasites.

On trouvera ci-joint deux courbes types obtenues à quelques jours d'intervalle et dans les mêmes conditions de lancement.

Il ne faut pas attacher d'importance à la translation d'ensemble de ces courbes. Elle provient d'une modification du fil à long terme ou d'une dérive lente du circuit de mesure.

Par contre, les fluctuations observées à court terme (ΔT maxi $\simeq 10^{-3}$ sec ; $\frac{\Delta T}{T}$ instantané 2.10^{-5}) peuvent être dûs à des réarrangements micro-cristallins se produisant dans le fil de suspension.

Mais la marche globale en 24 heures peut être bien inférieure à la seconde (si l'amplitude est stable) puisqu'on moyenne alors un grand nombre de petites fluctuations positives ou négatives.

La troisième courbe indique le défaut d'isochronisme moyen obtenu pour une dizaine de relevés (Sa position sur le graphique est arbitraire

2/ Mesures de période avec mouvements parasites.

a) Relions les déplacements horizontaux du spot à ceux du miroir. (fig.7)

- Sans perturbation, les impulsions sont communiquées à la cellule pour $\alpha = 0$

soit $x_1 = x_o = DD_1 = -D \operatorname{tg} \theta$

- Avec perturbations

soit u le déplacement de O" (axe du cylindre) suivant O_1x_1

v " O" suivant O_1y_1

Déplacement du spot correspondant à v

$O_1O" = v$

dans le triangle ACE

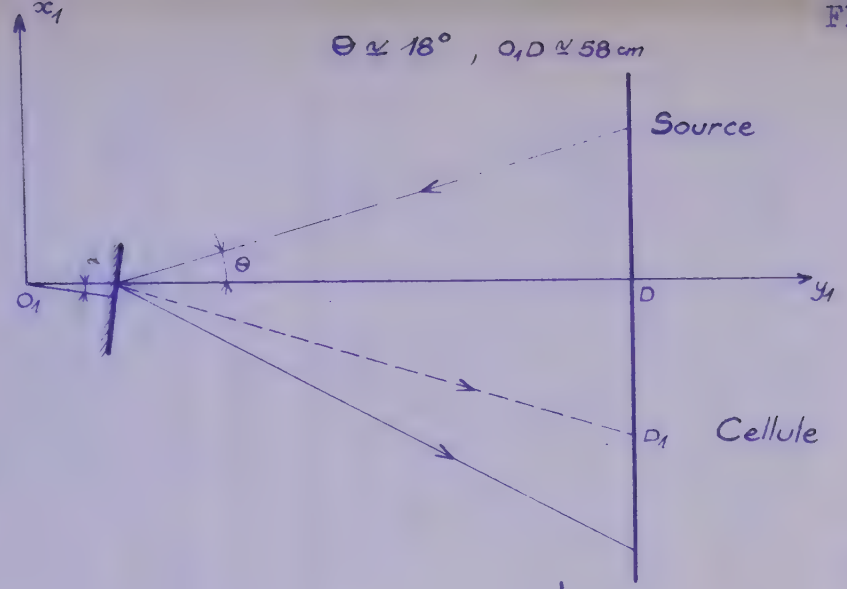
$\hat{A} = 2(\theta+\alpha)$

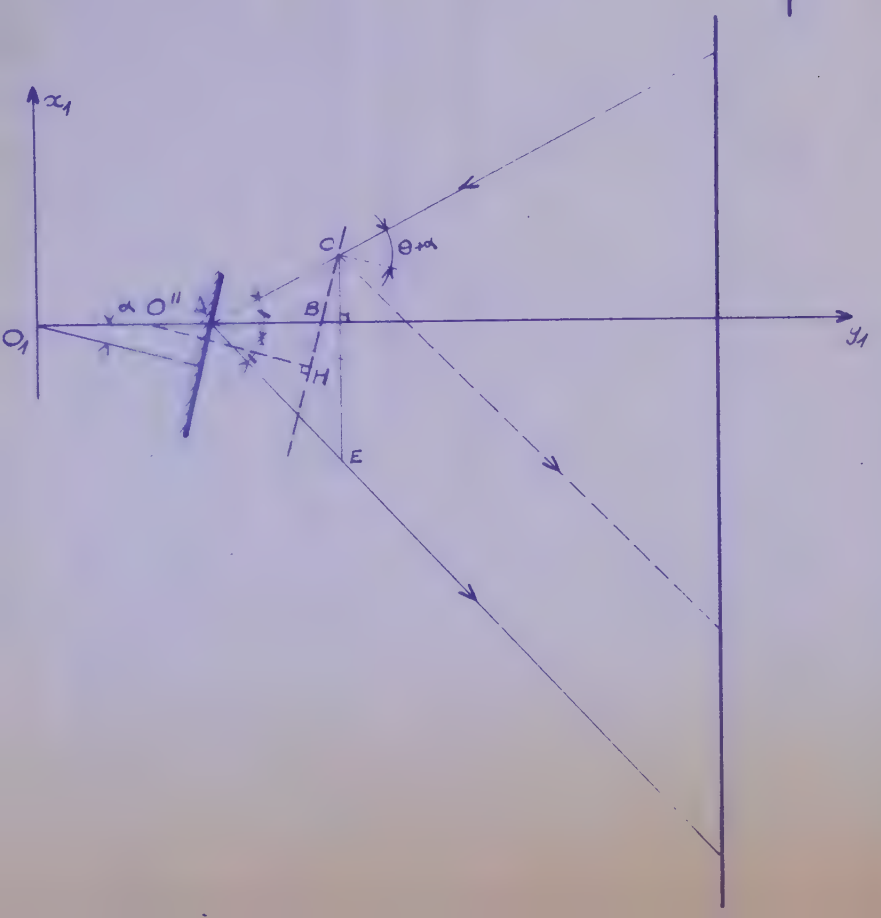
$\hat{C} = \pi/2 - \theta$

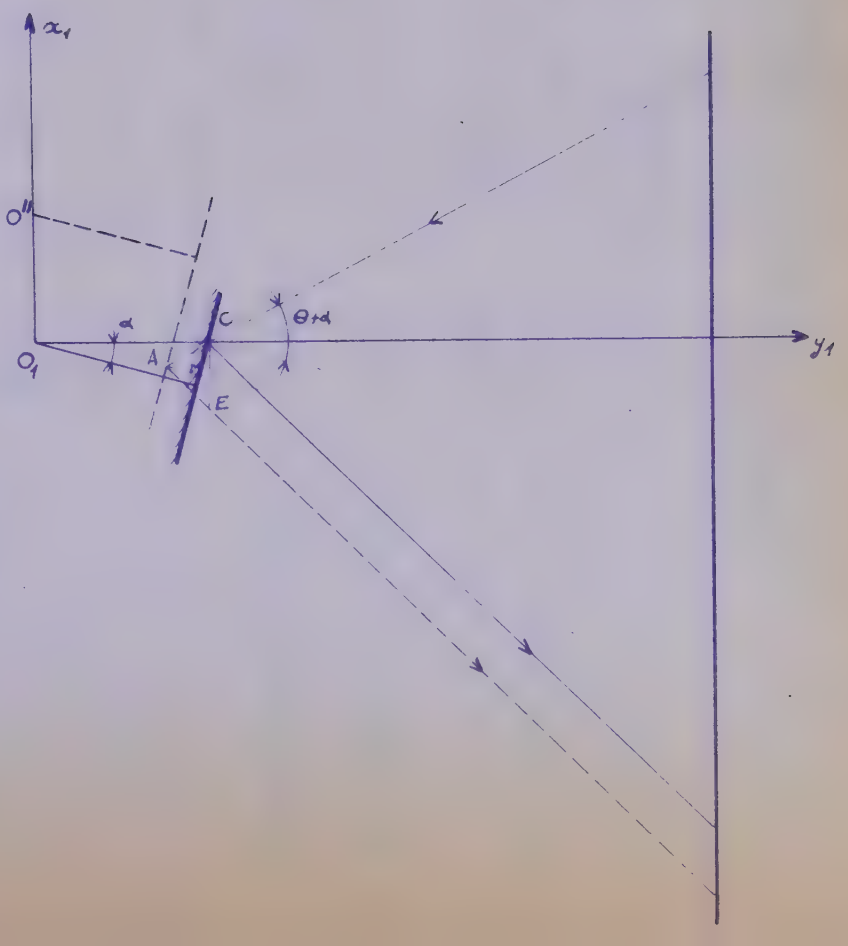
$\hat{E} = \pi/2 - (\theta+2\alpha)$

$$AC = \frac{v \cos\alpha}{\cos(\theta+\alpha)} \quad ; \quad EC = \frac{AC \sin \hat{A}}{\sin \hat{E}} = 2v \frac{\cos\alpha \sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+2\alpha)}$$

FIG.7


$\Theta \simeq 18°$, $O_1D \simeq 58$ cm
x_1
Source
Θ
O_1
D
y_1
D_1
Cellule


x_1
$\Theta+\alpha$
C
α O''
B
O_1
y_1
H
E


x_1
O''
α
C
$\Theta+\alpha$
A
O_1
y_1
E

Déplacement du spot correspondant à u.

De la même façon que précédemment, $EC = AC \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{E}}$

$$EC = 2u \sin\alpha \frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+2\alpha)}$$

soit au total, en respectant les signes, le déplacement résultant d est égal à :

$$d_{Ox} = \frac{2\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+2\alpha)}\left[-v\cos\alpha + u\sin\alpha\right]$$

On peut également exprimer u et v en fonction de x_1, y_1, α, β et γ

soient $\begin{cases} O_1O'' = C \text{ au repos} \\ k : \text{distance du centre du miroir à l'encastrement supérieur} \end{cases}$

On obtient en lère approximation :

$$u = -C\alpha\cos\alpha - (\ell-k)(\beta\alpha+\gamma) + x_1\frac{k}{\ell}$$

$$v = -C\alpha\sin\alpha + (\ell-k)(\beta-\alpha\gamma) + y_1\frac{k}{\ell}$$

Ces équations n'ont pour intérêt que de donner l'ordre de grandeur de u et de v. Mais celui-ci est parfaitement connu puisque son maximum correspond au rayon du tube portant le miroir, c'est-à-dire u ou $v_{maxi} \simeq 1$ mm.

Application numérique dans le cas le plus défavorable:

Unités CGS : $\theta \simeq 18°$; déplacements parasites petits et angle de déclenchement α voisin de 0.

soit $d \simeq 6{,}6.10^{-2}$

$$\alpha' \# \alpha_o \quad \omega_N = 0{,}66$$

Vitesse du spot : v = 38 .

Erreur de période correspondante : $T \simeq 2.10^{-3}$ sec

b) <u>Production des mouvements parasites</u>.

Les mouvements parasites sont communiqués au pendule par un électro-aimant solidaire d'une tige venant frapper le tube ou la masse pendulaire.

Leur amplitude est réglée par la tension d'alimentation et au moyen d'une butée. Ils ont toujours été déclenchés pour $\alpha = \alpha_o$. Il aurait été intéressant de faire varier le déphasage entre α et le choc. On risquait alors de freiner la masse pendulaire, et ce procédé nécessitait obligatoirement un appareillage électronique (Ω_o, Ω_1 etc... $\gg \omega_N$)

c) Courbes

- Mouvements faibles : pas de chocs entre le tube et le fil de suspension

Fig.8.
1er choc : u et v $\simeq$ r/4 ; ΔT maxi 4.10^{-4}
Oscillations parasites amorties en 20 T.

$\leq |\Delta T| \simeq 5.10^{-3}$, donc écart très faible

2ème choc : u et v $\simeq$ 2/3 r ; ΔT maxi $1,7.10^{-3}$
Oscillations parasites amorties en 20T.

$\leq |\Delta T| \simeq 10^{-2}$ sec

Fig.9
1er choc : u et v $\simeq$ r/2 ; $|\Delta T|$ maxi 10^{-3}
Oscillations parasites amorties en 20 T

$\leq |\Delta T| \simeq 5.10^{-3}$

2ème choc : u et v $\simeq$ r/2 ; max$|\Delta T|$ 10^{-3}
Oscillations parasites amorties en 14 T

$\leq |\Delta T| \simeq 6.10^{-3}$

D'autres essais avec des chocs faibles ont été effectués : les résultats sont sensiblement identiques

En résumé pour u et v $< r$, $|\Delta T| < 2.10^{-3}$

et $\leq |\Delta T| < 10^{-2}$ sec.

Ces types de mouvements correspondent sensiblement à ceux que l'on provoque par un déplacement d'air moyen autour du pendule, par le lancement ou par une vibration légère du support.

- Mouvements importants.

Chocs entre tube et fil de suspension. Les perturbations peuvent donc devenir très importantes.

Fig.10.
X_o et $Y_o \simeq$ 3mm $|\Delta T|$ maxi $\simeq 2.10^{-2}$
Oscillations parasites amorties en 42 T

$\leq |\Delta T| \simeq 2.10^{-1}$

Fig.11
Mouvement identique au précédent

maxi $|\Delta T| \simeq 3,5.10^{-2}$

Oscillations parasites amorties en 50 T.

$\leq |\Delta T| \simeq 10^{-1}$ sec

Fig.12
Mêmes mouvements

maxi $|\Delta T| \simeq 9,4.10^{-2}$

Oscillations parasites presque amorties en 58 T. $\leq |\Delta T| \simeq 3.10^{-1}$ sec

FIG.8

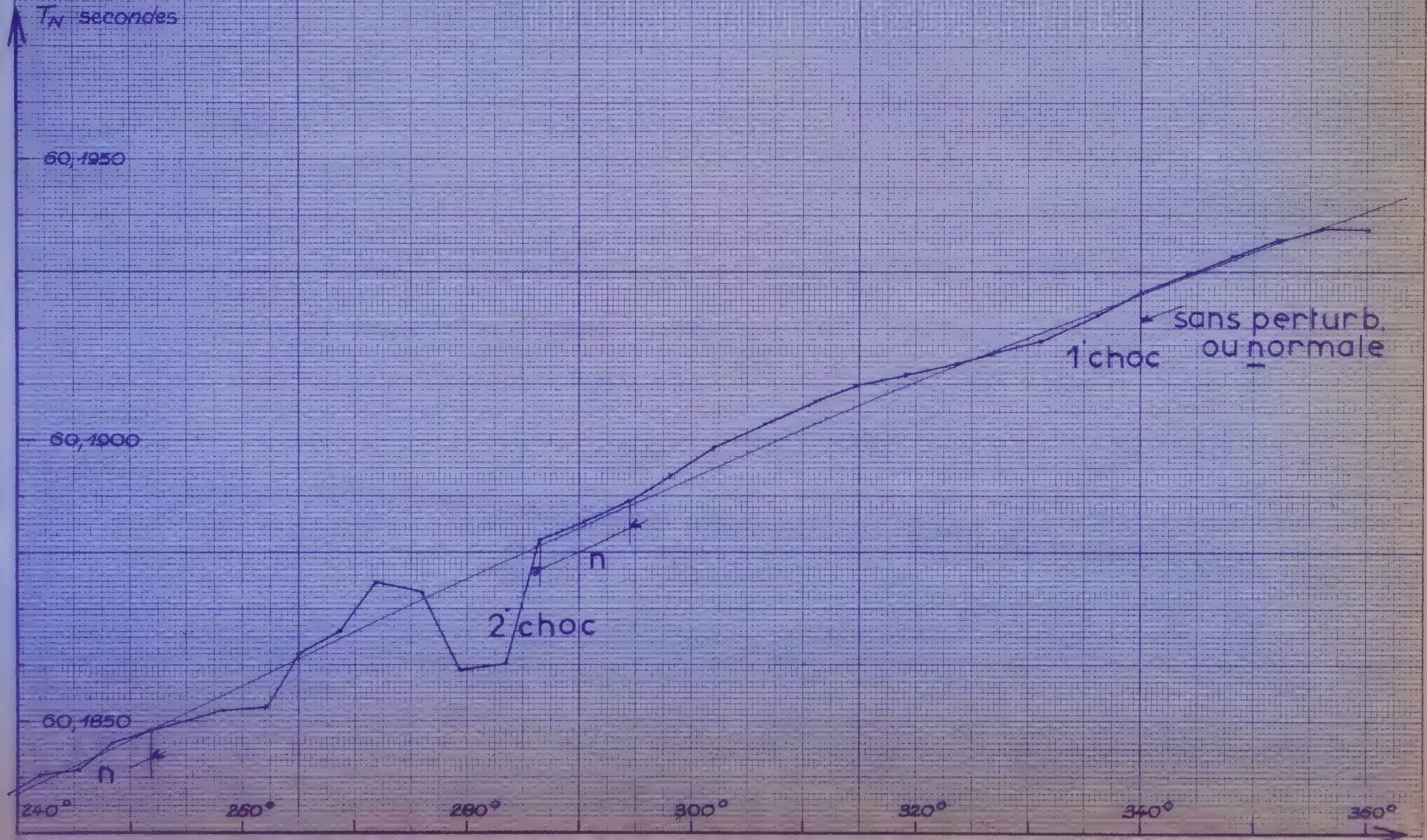

T_N secondes
60,1950
60,1900
60,1850
sans perturb.
ou normale
1 choc
2 choc
n
n
240°
260°
280°
300°
320°
340°
360°

FIG. 9

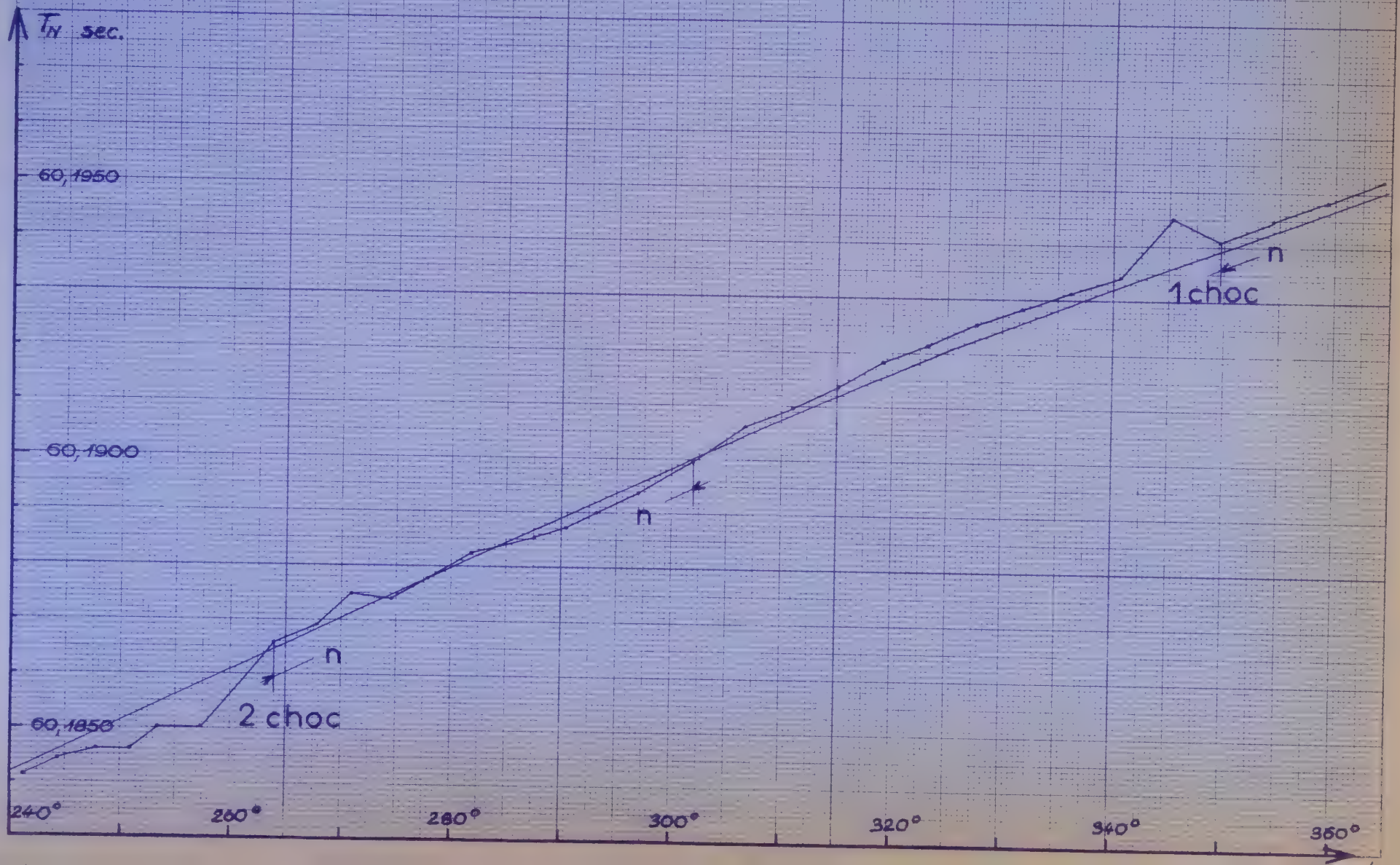

T_N sec.
60,1950
60,1900
60,1850
n
2 choc
n
n
1 choc
240°
260°
280°
300°
320°
340°
360°

FIG.10

T_N sec.
60,1950
60,1900
60,1850
choc
n
Δ n
240°
260°
280°
300°
320°
340°
360°
α_o degre

fig. 11
60,2000
60,1950
60,1900
10⁻³
n
choc
Δn
240°
260°
280°
300°
320°
340°
350°

FIG.12
60,2000
60,1950
60,1900
choc
n
250°
280°
300°
320°
340°
360°

FIG. 13

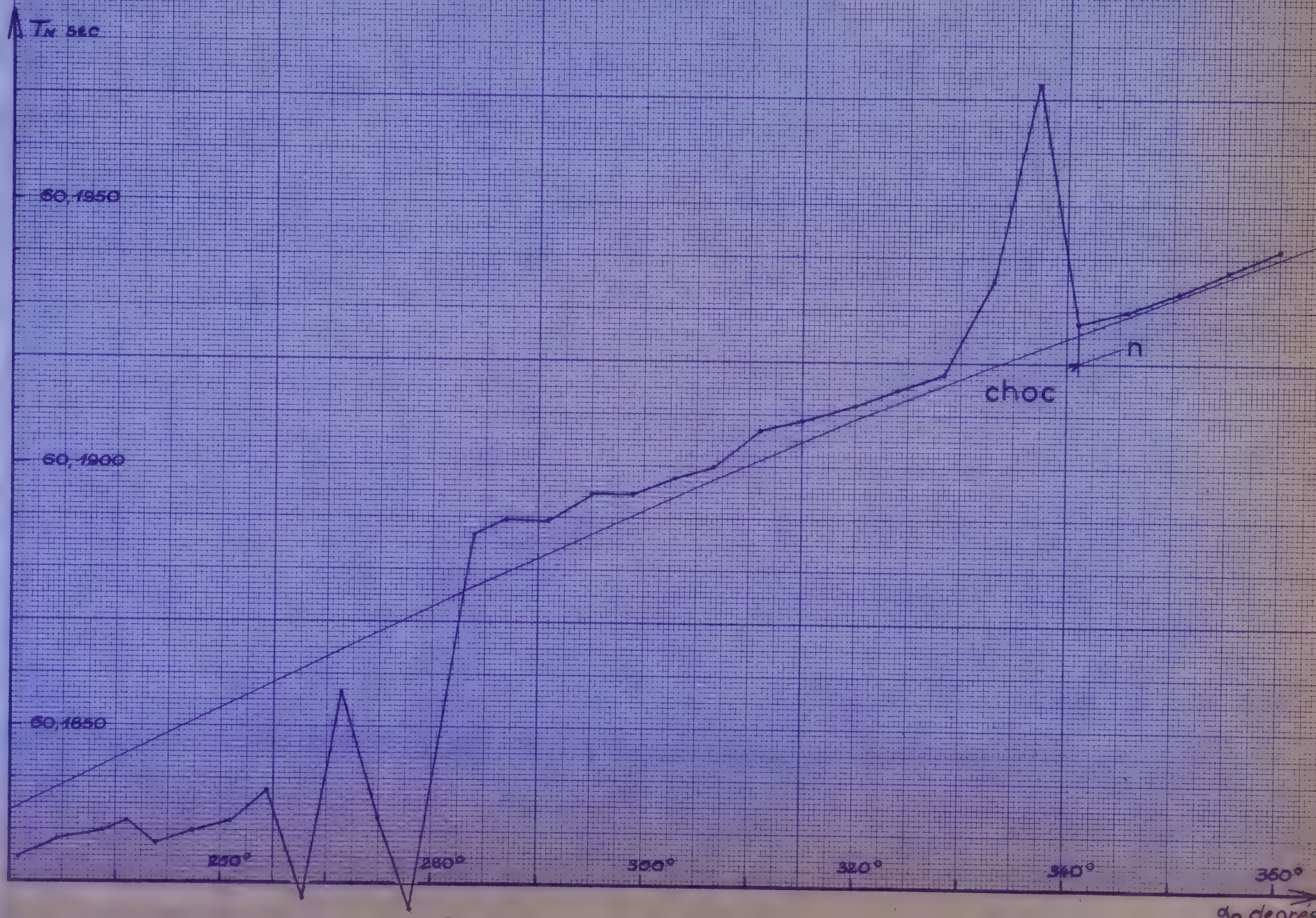


Fig.13

Mêmes mouvements

1er choc : maxi $|\Delta T| \simeq 5.10^{-3}$

Oscillations amorties en 20 T

$\leqslant |\Delta T| \simeq 3.10^{-2}$

2ème choc : maxi $|\Delta T| \simeq 5,5.10^{-3}$

Oscillations amorties en 36 T

$\leqslant |\Delta T| \simeq 6.10^{-2}$

En résumé : Pour u et v $> r$, et encore compatibles avec un bon fonctionnement

$$|\Delta T| < 10^{-1} \text{sec} \quad ; \quad \leqslant |\Delta T| < 0,5 \text{ sec.}$$

Conclusion.

L'étude dynamique du pendule de torsion nous a montré que les faibles mouvements parasites ne modifient pas la période de l'oscillateur. Quel que soit ensuite le dispositif de comptage utilisé, des fluctuations sont observées, plus ou moins importantes selon les cas mais toujours limitées en nombre du fait de l'amortissement rapide de ces mouvements et ne conduisant pas à des marches importantes.

Il reste malgré tout un garde-temps fragile. Mais jusqu'alors on a peu cherché à la rendre moins sensible aux vibrations .

Il est regrettable que le pendule de torsion ne soit pas plus utilisé comme horloge de luxe. Il se prête fort bien à un aspect extérieur soigné, s'adapte parfaitement aux procédés d'entretien photoélectrique actuels et à qualité et prix égaux donne une marche, si ce n'est inférieure, du moins égale à celle des pendules électriques à balancier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.HAAG - Bull. Soc. Mathématiques - Tome LVI p.240 et Journal de Math. pures et appli. tome XXV fac.n°1 Année 1946

[2] R.CHALEAT - Etude des déformations des fils élastiques circulaires - Annales fr. de Chronométrie 20ème année 2°Tri. 2ème série - tome IV

[3] BEGHIN - Cours de Méca. théorique et appliquée. Tome 1 . Gauthier Villars

[4] J.HAAG - Mouvements vibratoires - tome II - chap.8 - Collection Euclide.

J.HAAG & R.CHALEAT - Problèmes de théorie des oscillations . 1960 . Lib. Gauthier-Villars.

CHAPITRE 2

ACTIONS MECANIQUES DE LA LUMIERE

Pression radiométrique et pression de radiation.
Applications au pendule de torsion et à un petit mouvement d'horlogerie

-:-:-

Introduction.

L'effet radiométrique a été mis en évidence en 1875 par CROOKES lors de recherches sur la pression de radiation.

De 1920 à 1935, de nombreux chercheurs allemands ont étudié expérimentalement ce curieux phénomène et de longs et pénibles calculs ont été effectués pour exprimer la "fonction radiométrique".

Dans l'exposé classique, nous avons introduit les remarques que nous croyons personnelles et les résultats expérimentaux obtenus. Ils sont pour la plupart en accord avec les différents travaux inclus dans la bibliographie aimablement communiquée par M.J.LECOMTE (Laboratoire de Recherhces Physiques de la Sorbonne) et que nous remercions tout particulièrement [1] .

I - FORCES RADIOMETRIQUES

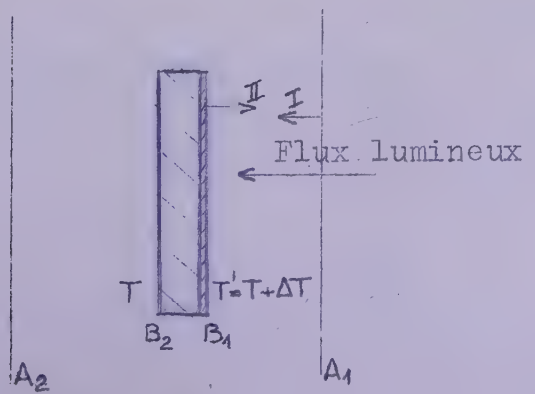
L'effet radiométrique est un phénomène de thermodynamique du vide. Soit une surface absorbante placée dans une atmosphère raréfiée et recevant un rayonnement. Elle s'échauffe et une différence de température s'établit alors entre ses faces avant et arrière. Il en résulte une agitation thermique des molécules du gaz résiduel, plus importante d'un côté que de l'autre et un excès de pression sur la face avant.

Le rayonnement incident peut être quelconque, visible ou non. Nous avons toujours utilisé un flux lumineux.

A/ Théorie élémentaire

Elle est dûe en grande partie à KNUDSEN.
Nous utilisons dans l'exposé les résultats simples de la théorie cinétique des gaz.

a/ Domaine des hautes pressions [2]



Le gaz est contenu dans une enceinte de forme quelconque limitée par des surfaces A_1 et A_2.

Soit T la température.

Le rayonnement incident est absorbé en partie par la face B_1 et un équilibre s'établit avec T' à l'avant et T à l'arrière.

L'expérience montre que la pression s'uniformise rapidement dans l'enceinte. Les molécules de gaz proches de B_1 ont une vitesse moyenne plus grandes que celles proches de B_2, mais leur nombre par unité de volume est plus petit. D'autre part, si elles ont subi un accroissement d'énergie cinétique, elles sont immédiatement freinées par le grand nombre de chocs qu'elles subissent (libre parcours moyen très petit: 7.10^{-6} cm à 760mm de Hg)

La pression est légérement augmentée dans l'enceinte mais les pressions moyennes sur B_1 et B_2 restent identiques.

b/ Domaine des basses pressions [2]

On considère un vide pour lequel le libre parcours moyen (l.p.m pour abréger) est de l'ordre de grandeur de la distance A_1B_1 (7cm à 10^{-3}mm de Hg)

Un grand nombre de molécules, de vitesse perpendiculaire à B_1, va donc librement de A_1 en B_1. Suivons le trajet d'une telle molécule. Partant de A_1 avec une vitesse v, un choc élastique se produit sur B_1. Elle repart avec $v+\Delta v$. Revenant vers B_1 après choc sur A_1 elle a de nouveau la vitesse v (coefficients de restitution et d'accomodation supposés égaux à 1)

Côté A_1B_1 vitesse moyenne d'une telle molécule : $v + \frac{\Delta v}{2}$

Côté A_2B_2 " " " " " : v

Si le nombre de molécules par unité de volume reste le même de chaque côté, on obtient d'après la théorie cinétique :

$$\frac{\Delta p}{p} = 2\,\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta T}{T}$$

$$\Delta p = K\,p\,\frac{\Delta T}{T}$$

La pression étant plus forte du côté B_1, la surface tend à se déplacer dans le sens du flux lumineux incident.

Cette formule n'est valable que pour un l.p.m voisin des dimensions de l'enceinte.

Si le l.p.m croît, le nombre de môles heurtant la surface B_1 sera plus faible. Si le l.p.m décroît, les chocs intermoléculaires absorbent une plus grande quantité d'énergie qui ne sera plus transmise aux parois.

On peut donc prévoir un maximum de Δp en fonction de p.

c/ Explication plus rigoureuse.

Après un certain temps d'exposition, l'état devient stationnaire(1)

Dans le sens I courant de molécules de densité $\frac{n_1 v_1}{3}$

" " II " " " $\frac{n_2 v_2}{3}$

v_1 et v_2 vitesses correspondant aux températures T_1 et T_2

L'hypothèse (1) fournit : $\frac{n_1 v_1}{3} = \frac{n_2 v_2}{3} = \frac{n v_1}{6}$

n : nombre total de moles/cm^3

avec : $p = \frac{n\ m\ v_1^2}{3}$

sur B_2 $\quad p_1 = \frac{m}{3}\left[\frac{n}{2} v_1^2 + \frac{n}{2} v_1^2\right] = \frac{n\ m\ v_1^2}{3}$

sur B_1 $\quad p_2 = \frac{m}{3}\left[n_1 v_1^2 + n_2 v_2^2\right] = \frac{m}{3} n_1 v_1 \left[v_1 + v_2\right] = \frac{m}{6} n v_1^2 \left[1 + \frac{v_1}{v_2}\right]$

or, $v = K' \sqrt{T}$

Excès de pression du côté 1 $\quad p_2 - p_1 = \frac{p}{2}\left(\sqrt{\frac{T'}{T}} - 1\right)$

$$\text{et } \Delta p \simeq K\ p\ \frac{\Delta T}{T}$$

B/ Réalisation du radiomètre.

Une ailette construite de façon convenable est donc soumise à une force lorsqu'elle reçoit un flux lumineux. Si on réalise un moulinet portant plusieurs ailettes celui-ci a tendance à tourner et peut fournir un couple : c'est le radiomètre de CROOKES.

1/ Face absorbante.

On trouvera fig.1 le diagramme de distribution de l'énergie en fonction de la longueur d'onde pour le rayonnement solaire , une lampe à incandescence et une lampe à émetteur infra-rouge Philips.

Si l'absorption est totale, on obtient un échauffement maximum La nature de la surface employée joue donc un grand rôle; le meilleur absorbant est évidemment le noir.

La face avant se comporte alors à peu près comme un radiateur intégral. On se réfère à la loi de Kirchhoff, c'est-à-dire :

$$\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = E_\lambda$$

e_λ pouvoir émissif pour la longueur d'onde λ
a_λ " absorbant
E_λ intensité spécifique du rayonnement "
Pour un corps noir $a_\lambda = 1$ et e_λ est maximum .

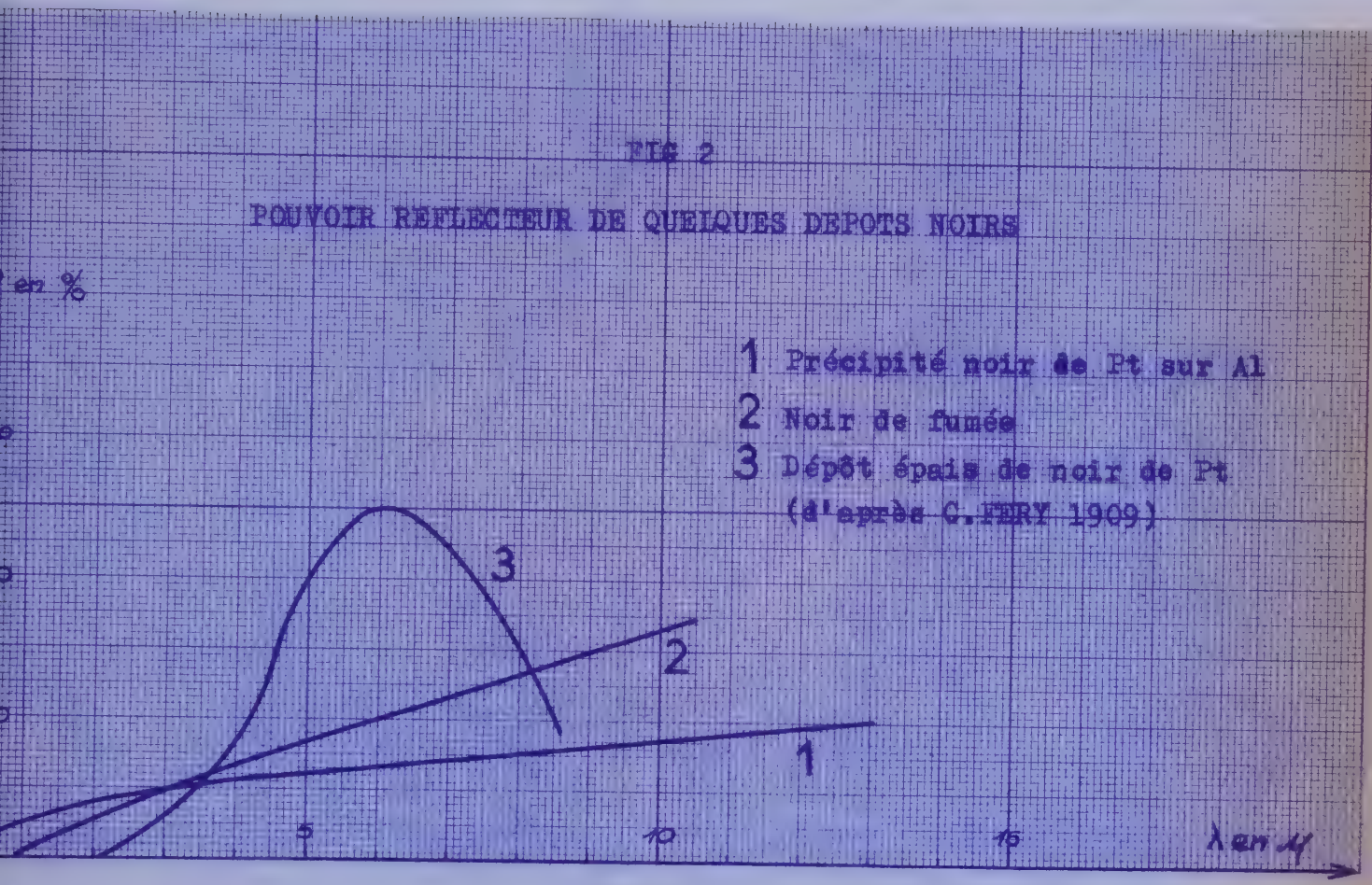
Si ce corps absorbe certaines radiations, il en émet également et son spectre d'émission est connu en fonction de T°. Il est tel que λ_m, longueur d'onde pour laquelle l'intensité est maxima, est définie par : $\lambda_m T° = Cte$ (loi de Wien)

(Ex : si t = 20°, T° = 293 °K, $\lambda_m = 10\mu$ domaine compris entre 5 et 25μ)

Il est donc intéressant d'utiliser des surfaces:
- absorbantes pour le spectre incident considéré
- réflechissantes pour de plus grandes longueurs d'ondes.

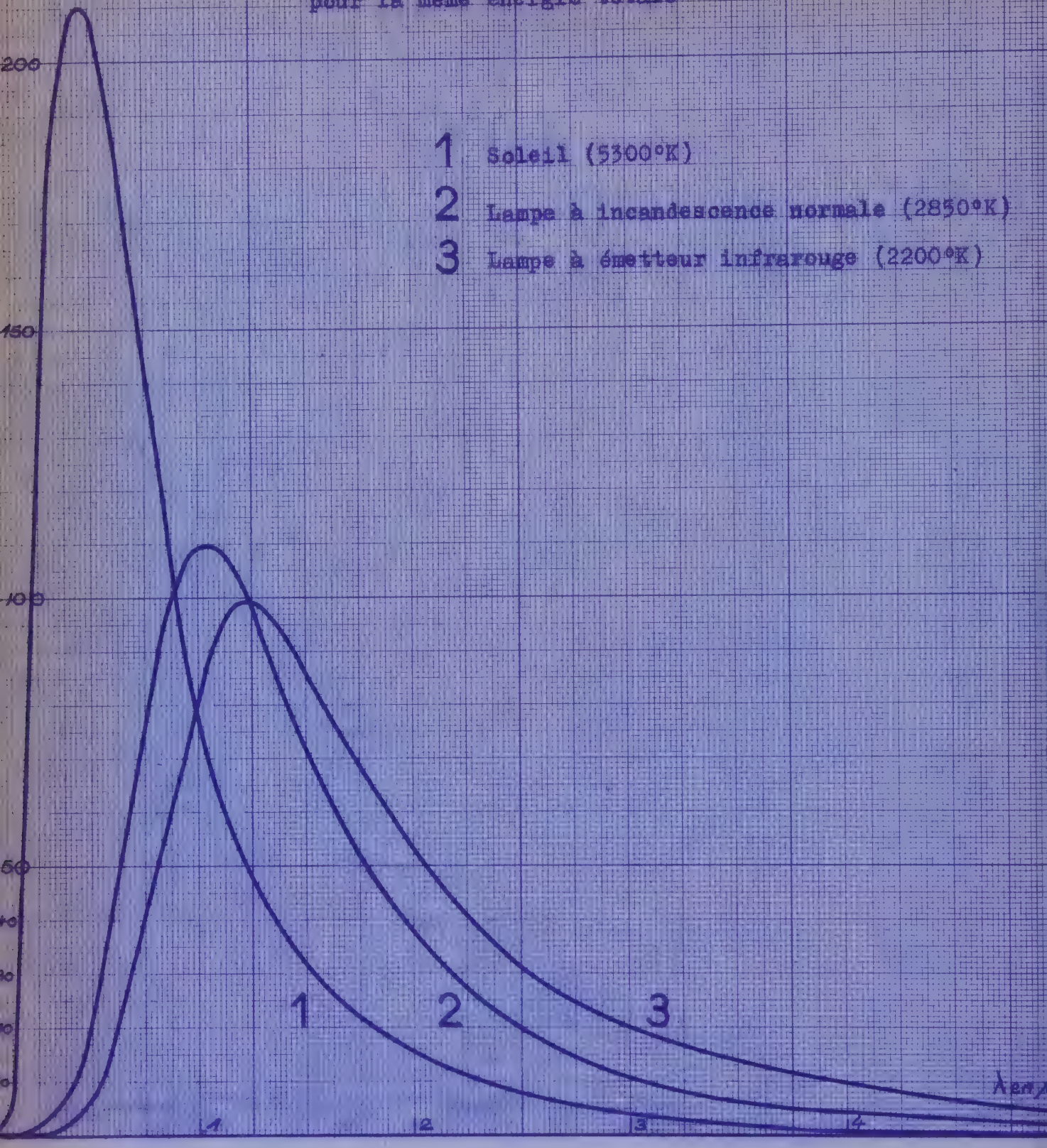
FIG 2

POUVOIR REFLECTEUR DE QUELQUES DEPOTS NOIRS



DISTRIBUTION DE L'ENERGIE EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE

pour la même énergie totale



Le noir animal et le noir de platine ont une absorption sélective très peu prononcée. La fig. 2 représente le pouvoir réflecteur de quelques dépôts en fonction de λ. Les métaux sont de très bons réflecteurs pour les grandes longueurs d'ondes. (pour l'aluminium au moins jusqu'à 10 μ)

Si de tels métaux peuvent être "noircis" pour le spectre visible et rester réfléchissants pour des longueurs d'ondes supérieures, ils seront ainsi de mauvais émetteurs dans ce domaine et rayonneront moins d'énergie.

Remarque : On recommande d'utiliser un support d'aluminium recouvert d'une mince couche de noir obtenue par dépôt chimique ou électrochimique. (propriétés intermédiaires entre celles du support et des oxydes superficiels).

On peut procéder par :

- oxydation anodique de l'aluminium (difficile sur feuilles minces)
- traitement chimique de l'aluminium (procédé MBV)
- traitement chimique du duralumin (très facile)

2/ Influence de la pression.

Comme on l'a vu précédemment, les forces radiométriques dépendent de la pression. Le maximum de sensibilité est atteint pour une pression p_o fonction des dimensions de l'enceinte (lors de nos expériences l'épaisseur des ailettes est toujours très petite par rapport au diamètre de l'enceinte).

Pour toutes les mesures de couples, nous avons utilisé une balance de torsion. Les déviations sont lues par la méthode de Poggendorf. Nous remercions tout particulièrement la Sté Spiraux français de Besançon qui a bien voulu mettre à notre disposition une gamme de fils de couples étalonnés compris entre 3.10^{-2} et 3.10^{2} dynes cm/rad/cm de longueur.

La fig.3 représente le relevé expérimental de la pression radiométrique en fonction de $\mathrm{Log}_{10} p$

Pour cette mesure, la palette utilisée est du type 4 (cf. structure des ailettes).

Source : émetteur infra-rouge 150 mW/cm^2

Enceinte Ø int. 200 mm

$p_o \sim 7.10^{-3}$ (jauge à ionisation)

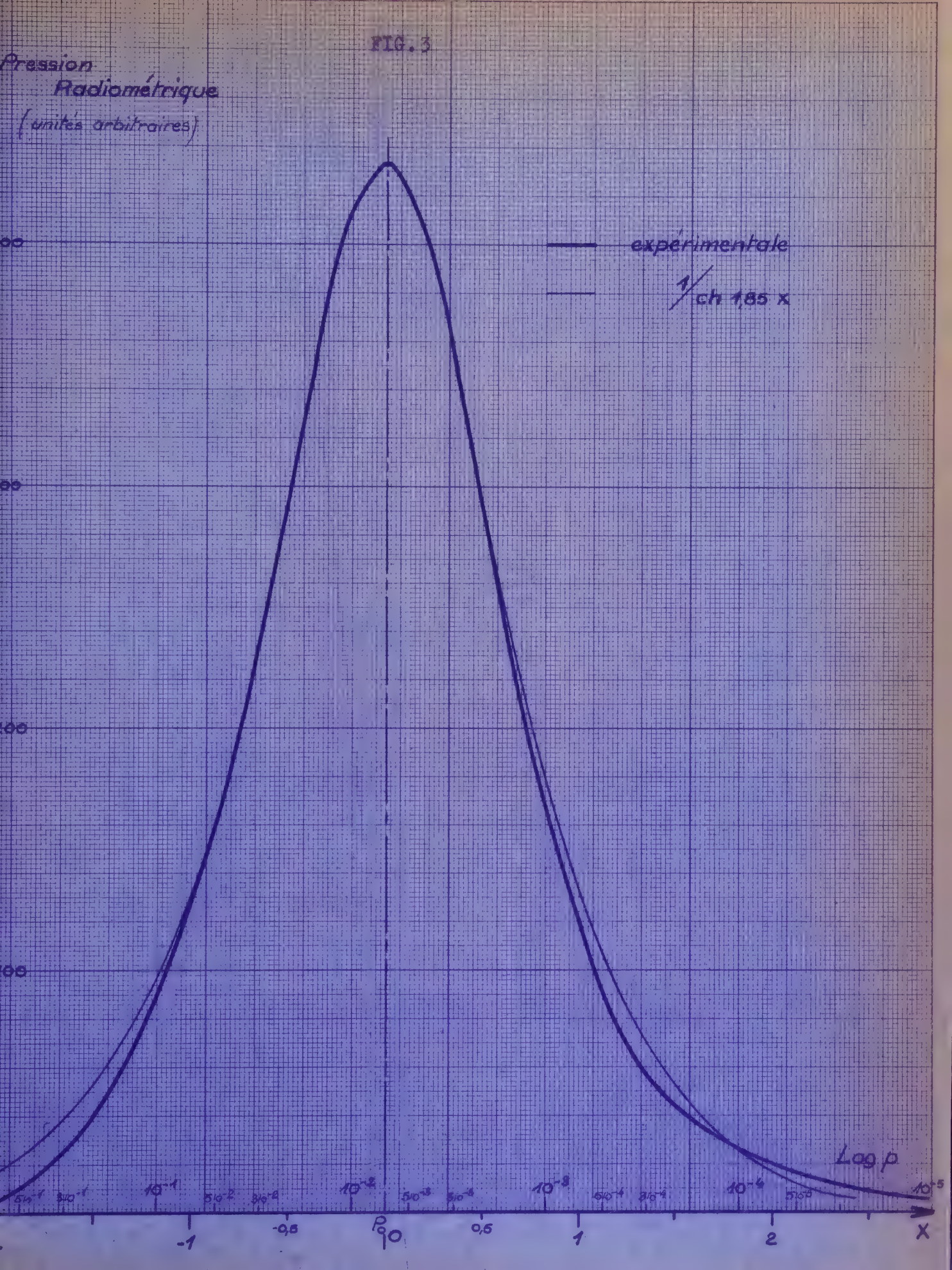
Pour des pressions supérieures à 1 mm de Hg, il est illusoire de parler avec certitude de forces radiométriques :
Elles deviennent très faibles et sont perturbées par les courants de convection.

Pour des pressions inférieures à 10^{-5} mm de Hg (l.p.m : 7 mètres) aucun effet notable n'est observé.

La symétrie remarquable de la courbe par rapport à p_o permet d'écrire avec une bonne approximation :

$$P_{\text{radiom.}} = \frac{A}{\text{ch } cx} \qquad \text{avec } x = \frac{1}{c} L \frac{p}{p_o}$$

FIG. 3


Pression
Radiométrique
(unités arbitraires)
expérimentale
1/ch 1,85 x
Log ρ
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
-1
-0,5
ρ/0
0,5
1
2
X

Forme équivalente à $\frac{1}{P} = \frac{p}{a} + \frac{1}{bp}$ signalée par de nombreux auteurs (HETTNER 1924)

$$(\sqrt{\frac{a}{b}} = p_o \text{ et } \frac{p}{p_o} = e^{cx})$$

Il n'est pas possible de donner une loi simple définissant avec précision p_o. Par contre, la détermination expérimentale de cette pression sera toujours aisée.

Nos expériences ont porté sur des enceintes dont le diamètre intérieur était compris entre 80 et 200mm et pour lesquelles : $7.10^{-3} < p_o < 10^{-2}$.

3/ Influence du gaz.

La théorie élémentaire montre que la pression radiométrique est indépendante de la masse spécifique du gaz résiduel.

Une vérification expérimentale a été effectuée au moyen de trois gaz (on pompe jusqu'à 10^{-5} et on admet lentement le gaz proposé, puis on refait le vide à la pression désirée).

En prenant l'air pour référence, on a trouvé:

pour le CO^2 : d = 0,9
pour l'argon: d = 1,12

Des expériences de WESTPHAL, résultent :

CO^2 : 0,85
argon: 1,23
H^2 : 1,15

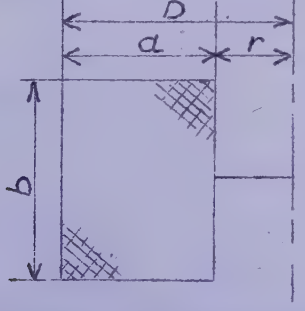
D'après WESTPHAL également pour les gaz monoatomiques le maximum se produit à des pressions plus grandes que pour les gaz diatomiques.

Sur un moulinet le gaz agit également par amortissement visqueux. On aurait donc intérêt à utiliser de l'hydrogène à viscosité dynamique trois fois plus faible que celle de l'air. (*)

4/ Augmentation de la sensibilité.

a/ dimensions des ailettes.

Leur forme importe peu; la sensibilité par unité d'aire est indépendante de la surface totale.



Pour un moulinet, si on impose:

$D = a + r$

$C_m = K\, b(D^2 - r^2)$

$C'_r = - Kbr$

$C'_r = 0$ pour $r = 0$

(*) ar ailleurs, nous traiterons le problème de l'amortissement dans le chapitre 3 au cours de l'étude du coefficient de viscosité de l'air en fonction de la pression.

FIG.4I

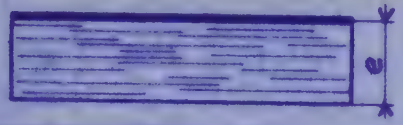
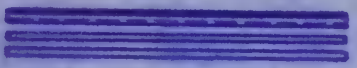
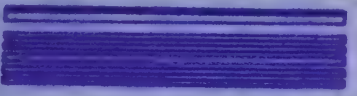
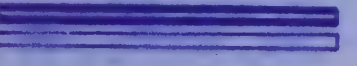
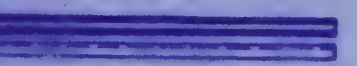
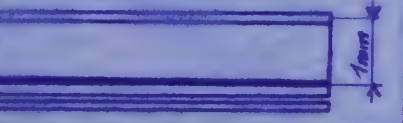
	Mica clair : dépôt de noir animal sur face avant.
	Mica recuit : dépôt de noir animal sur face avant.
	Aluminium e = 3/100 : noir animal ou noir laque mat. Mica e = 1/10 ou mylar e = 7/100
	Aluminium e = 3/100 : noir animal Mica ou mylar métallisé sur la face avant
	Mylar e = 7/100 face avant noir animal, face arrière métallisée 2 couches mylar e = 4/100
	Aluminium e = 3/100 face avant noir animal 5 couches mylar e = 4/100
	Mylar face avant noir animal, face arrière métallisée Mylar e = 7/100
	Mylar face avant noir animal face arrière métallisée Mylar e = 7/100 face avant métallisée
	Mylar face avant et arrière noir animal Mylar e = 7/100
	Mylar face avant et arrière noir animal Mylar métallisé sur face avant e = 7/100
	Mica e = 1/10 face avant noir animal Aluminium face avant noir animal , e = 3/100 Mica e = 1/10
	Mica clair Aluminium e = 3/100 face avant noir animal Mica clair

FIG.42

Source \ Type		1	3	4	4'	4"	5	6	7	8	9	10
Lampe à incandescence	C	10^{-2}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	0,12	0,11	0,095	0,06	0,11	0,12	0,035
E = 3000 lux	C'	-10^{-3}	$4\,10^{-3}$	$3\,10^{-3}$	$3\,10^{-3}$	$3\,10^{-3}$	10^{-3}	$3\,10^{-2}$	$4\,10^{-2}$	$3\,10^{-2}$	$5\,10^{-2}$	
Lampe infrarouge	C		0,32	0,32	0,32	0,37	0,32				0,35	0,11
E = 6000 lux	C'		0,015	0,015			$3\,10^{-3}$					

Source \ Type 2 mm	0,25	0,4	0,5	0,65	1	1,3
Lampe à incandescence E = 3000 lux	0,06	0,066	0,072	0,078	0,11	0,14

r = D/4 permet d'obtenir le couple moteur maximum (il faut également tenir compte du recouvrement)

Le moulinet porte un certain nombre de pales . Cinq est le nombre qui assure la meilleure continuité d'exposition au faisceau lumineux sans que les pales se masquent partiellement l'une l'autre.

b/ structure des ailes.

Nous cherchons à obtenir une différence de température aussi élevée que possible entre les deux faces de l'ailette. Un empilage de feuilles minces est souhaitable pour diminuer la conduction thermique.

Nous avons essayé de nombreuses dispositions portées sur les tableaux de mesure qui résument les essais. (4_1 et 4_2)

Remarques :

1/ Le montage n°3 simple à résliser donne de bons résultats. L'aluminium noirci ou oxydé superficiellement assure une bonne absorption; sa face arrière polie rayonne peu. La couche d'air et le mica réalisent l'isolement thermique.

L'épaisseur de la couche d'air est importante. Un collage serré entre aluminium et mica provoque une mauvaise sensibilité.

Une couche de 2 à 3/10 mm est satisfaisante; une plus épaisse (>5/10) ne donne aucune amélioration.

2/ Dans le cas du moulinet, celui-ci est actionné par un faisceau lumineux large. Il présente à la fois une face noircie d'un côté de l'axe de rotation et une face brillante de l'autre. Il faut alors éviter l'effet inverse C' c'est-à-dire une poussée dans le sens du faisceau par incidence sur la face brillante.

La disposition n°3 remplit cette condition. On obtient même C' petit et de même sens que C (signe +)

3/ Une variante intéressante consiste à faire subir au mica un recuit à 600°. Celui-ci "gonfle", se clive en lamelles très minces et devient opaque mais fragile. Après noircissement d'une face l'effet direct est très bon, mais la métallisation difficile sur l'autre face et l'effet inverse assez prononcé.

c/ mesures de sensibilité.

Nous examinons d'abord les données quantitatives des différents auteurs ayant étudié l'effet radiométrique. Nous pensons que ceux-ci se sont attachés à mesurer la pression radiométrique maxima c'est-à-dire correspondant à p_o.

Expériences de CROOKES.

Source : bougie stéarine.
éclairement d'ailette 40 lux (supposé)

P : 10^{-2} dynes/cm^2

Le récepteur utilisé par CROOKES est très certainement du type n°1. Nous avons effectué cette mesure dans des conditions identiques.

Il en résulte une pression de 10^{-4} dynes/cm^2 , soit 100 fois plus faible. (Nous n'avons pas consulté ces comptes-rendus originaux).

Expériences de DONLE.

- Couple mesuré par bifilaire.

Sources :
Bougie stéarine E = 4 lux P = 10^{-4} dynes/cm^2
Lampe Hefner (1H = 0,9B) E = 3,6 lux P = 7.10^{-5} dynes/cm^2

($\lambda_m = 1,6\mu$ grande quantité d'I.R.)

Bec Auer E = 210 lux P = 4 à 5.10^{-4} dynes/cm^2
(spectre bien centré dans le visible)
Bec Argand E = 54 lux P = 7.10^{-4} dynes/cm^2

Quelques extraits de nos mesures.

Bougie stéarine E = 30 lux (cellule au sélénium) palette type 3 P = $1,2.10^{-2}$ d/cm^2
lampe à incandescence E = 3000 lux " " P = 10^{-1} dynes/cm^2
Lampe IR Philips E = 6000 lux " " P = $3,2.10^{-1}$ d/cm^2

A l'intérieur du spectre visible et dans le proche infra-rouge, la longueur d'onde du rayonnement incident est pratiquement sans effet sur la pression radiométrique (constatation mise en évidence par filtres colorés)

Par exemple, pour l'émetteur infra-rouge utilisé, à éclairement égal, la pression semble plus importante. Examinons la courbe de sensibilité spectrale de la cellule au sélénium et les distributions de l'énergie en fonction de la longueur d'onde pour la lampe à incandescence et la lampe IR(fig.1 et 5).

Un éclairement double avec lampe infra-rouge correspond à une énergie totale émise trois fois plus grande.

Les résultats obtenus concordent bien avec ce que nous disions précédemment.

Enfin, pour une répartition identique de l'énergie, les expériences montrent que l'effet radiométrique est proportionnel à l'éclairement ou encore à l'énergie incidente (de quelques lux à 10^4 lux)

5/ Temps de réponse.

Pour un éclairement de 1000 à 10.000 lux, l'effet est maximum en 15 secondes avec un récepteur du type 3. On atteint 80/100 du maximum en 10 sec et jusqu'à 10 sec l'effet est rigoureusement proportionnel au temps.

Ces temps sont légérement plus courts dans le cas de dépôts absorbants minces.

FIG 6

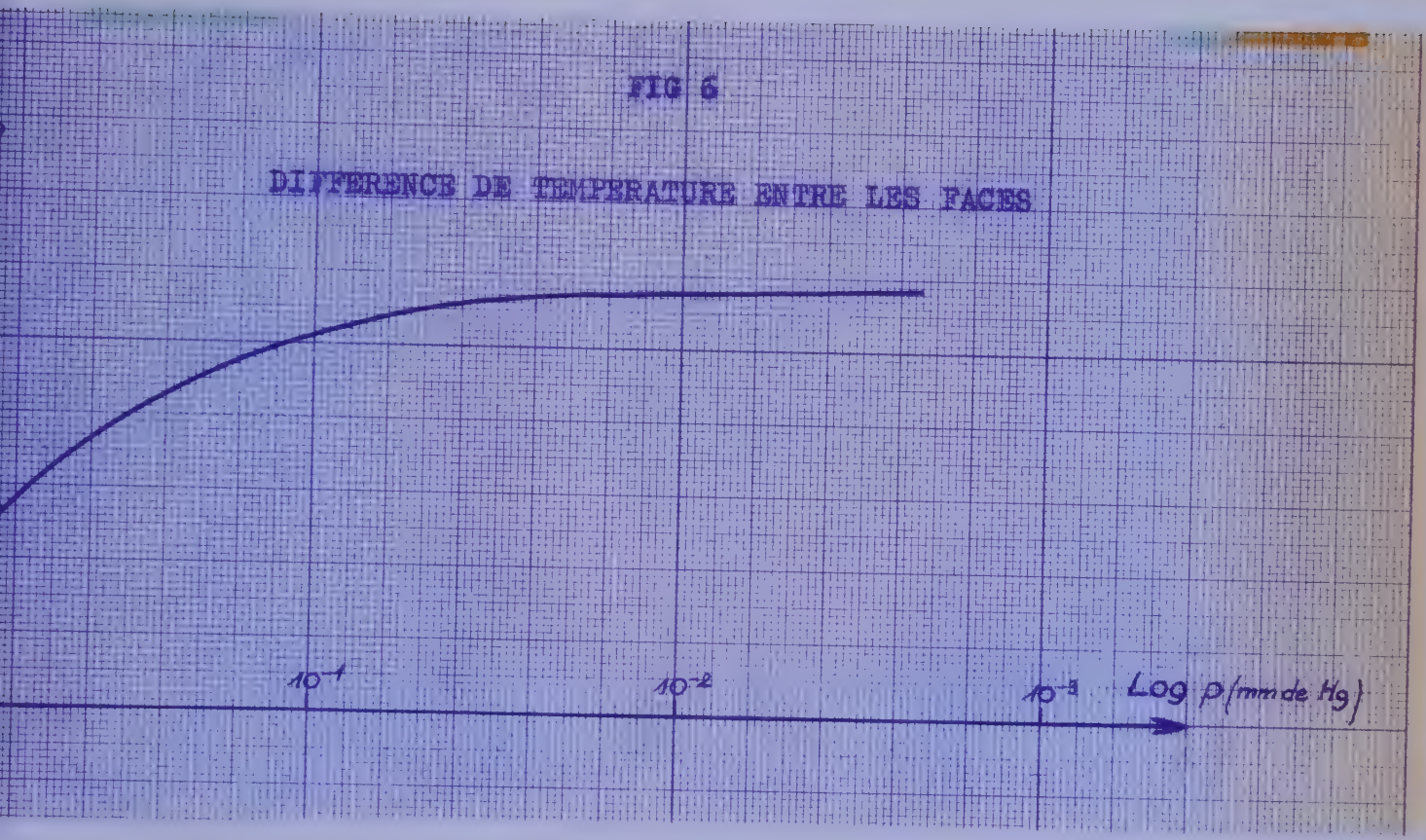
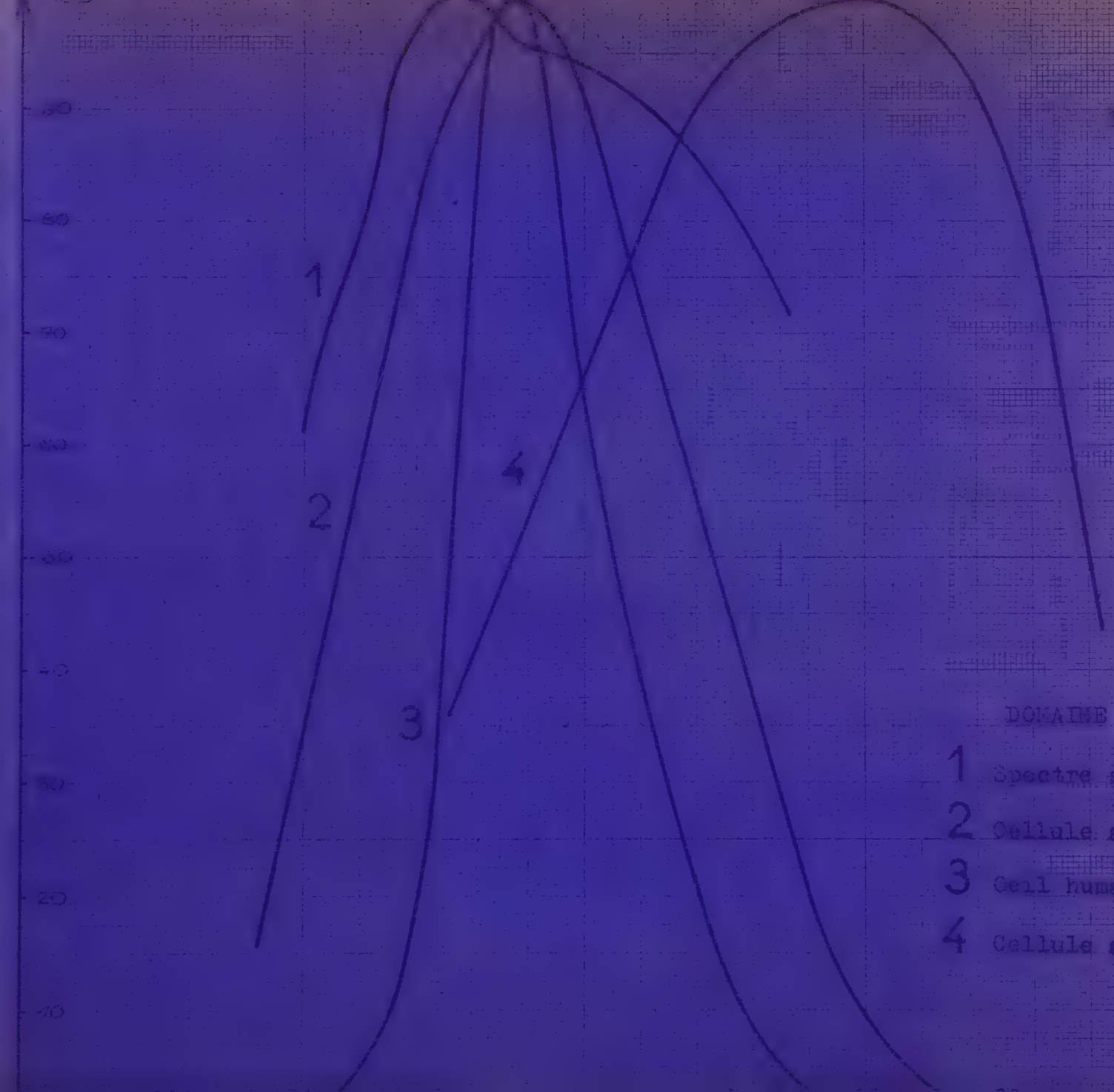

DIFFERENCE DE TEMPERATURE ENTRE LES FACES
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
Log p (mm de Hg)

FIG.5



DOMAINE DE SENSIBILITE

1 Spectre solaire

2 Cellule au sélénium

3 Oeil humain

4 Cellule au silicium

6/ Mesure des différences de température entre les faces.

Nous n'entrerons pas dans le détail de ces essais ; nous avons réalisé un montage en pont utilisant deux thermistances, l'une placée sur la face avant, l'autre sur la face arrière de l'ailette.

Un étalonnage est effectué au préalable dans une cuve à liquide (cf. Electronique industrielle n°10 sept. oct. 1956)

Elles atteignent jusqu'à 6° pour un éclairement de 10^4 lux et une ailette type 3.

On remarque également (M.GERLACH l'avait signalé en 1932) que cette différence de température est fonction de la pression jusqu'à environ 5.10^{-2}mm Hg (fig.6)

7/ Rendement de ce récepteur.

On peut assimiler le radiomètre à une machine thermique travaillant avec une différence de température ΔT entre sources chaude et froide.

soit $\eta = \frac{E_u}{E_i} = \frac{\Delta T}{T}$ E_{utile} / $E_{incidente}$

$T \simeq 3.10^2$

ΔT quelques degrés $\eta \simeq 10^{-2}$

Rendement global : Pour un moulinet portant des ailettes de surface $s = 25$ cm^2 et $r = 5$ cm, on obtient un C_m de 50 cm.dynes avec une lampe IR donnant à la distance considérée un flux énergétique de 2.10^{-1}W/cm^2

Puissance fournie à la palette: 5W

Le moulinet fait environ 2t/sec. $P_u \simeq 6.10^2$ ergs et $\eta \simeq 10^{-4}$

c'est-à-dire bien médiocre.

Comparaison. Rendement des cellules actuelles à couche d'arrêt.

Cellules Westaphot au sélénium (Cie Westinghouse)
Pour un flux solaire normal, on recueille 1,8W/m^2 $\eta \simeq 2.10^{-3}$

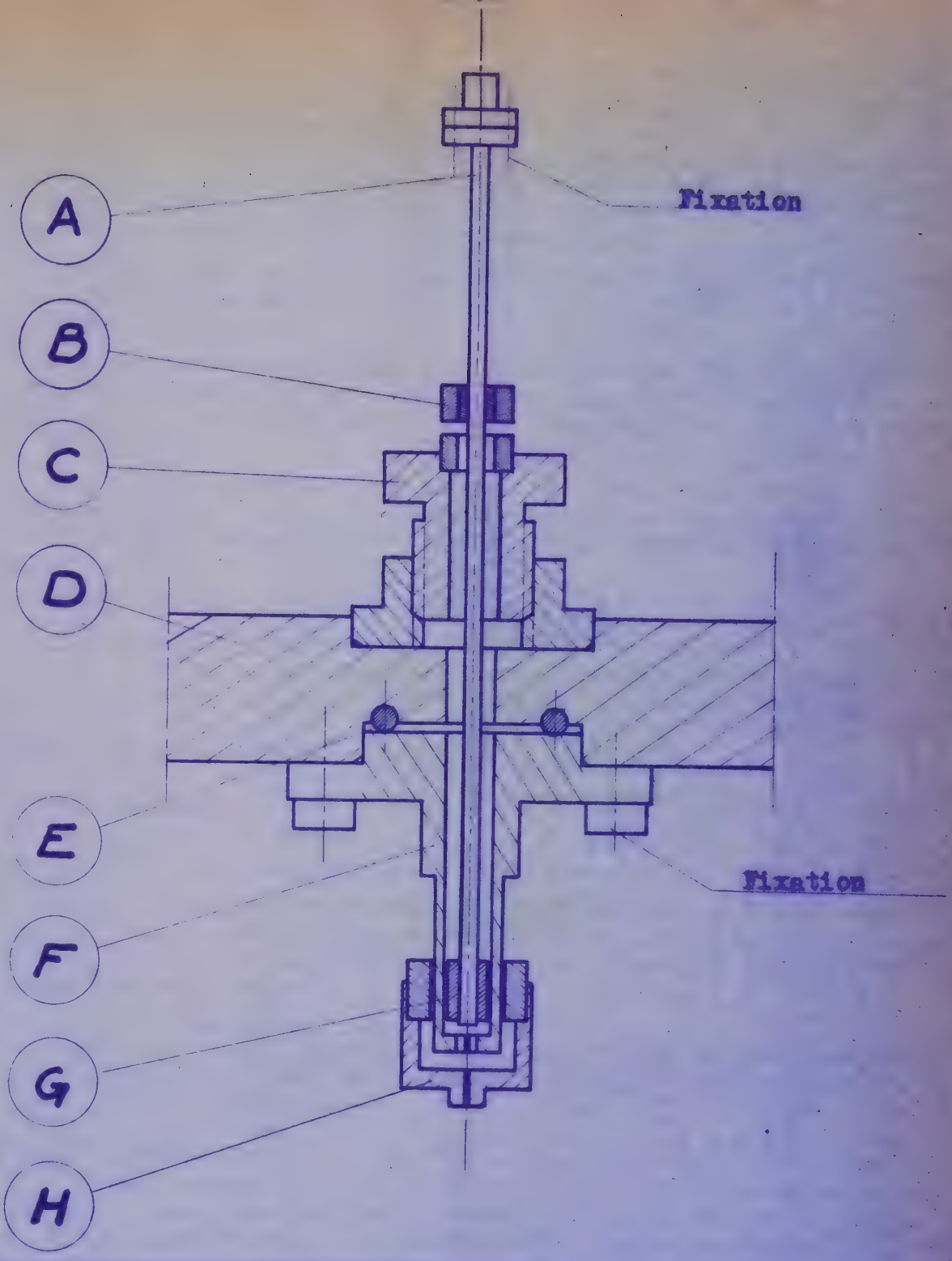
Cellules au silicium (Hoffmann USA)
Pour une énergie solaire incidente de 800 W/m^2 η : 5 à 9.10^{-2}

II - APPLICATIONS

A/ Entretien d'un petit mouvement d'horlogerie.

La difficulté essentielle provient de la nécessité du vide. Comme il est inconcevable d'y placer la montre elle-même, nous avons utilisé une sortie de mouvement étanche présentant de faibles frottements. La réalisation comporte une suspension et un accouplement magnétique.

On trouve sur la photographie (fig.7) et la fig.8 l'ensemble et les détails de réalisation du montage.



AXE DE RADIOMÉTRE

~ = ▽▽ =
▽ = ▽▽▽ =

H		Liaison avec montre
G		accouplement magnétique
F		Bouchon plastique
E		Joint "O"
D		Support
C		Réglage en hauteur
B		Suspension magnétique
A		tube (centré par pierres et axe Ø1)

matières : spécification n° :

traitement : Dessiné par :

assemblage n° Vérifié par :

cotes sans tolérances : Date :

Visa :

Echelle :

N°

L'axe de rotation du moulinet est constitué par un fil d'acier inoxydable de diamètre 2/10 de mm. Celui-ci est tendu et centré par une potence à sa partie supérieure. Côté inférieur ou accouplement magnétique le fil est soudé dans un prisonnier en laiton incorporé au moulage dans un bouchon en matière plastique.

Le moulinet est monté sur une assiette solidaire d'un long tube fin en acier inox. Celui-ci tourillonne sur le fil par l'intermédiaire de pièrres d'horlogerie.

Le poids de l'équipage est équilibré par les 2 aimants B. L'accouplement est réalisé par G et H. Ces aimants sont en ferrite. Ils ont été usinés puis aimantés avec montages convenables sur banc d'aimantation "LMM".

La montre utilisée est un calibre ETA automatique. Le rapport existant entre le barillet et l'axe portant la masselotte excentrée est de 200. Pour permettre le remontage on a ajouté deux couples d'engrenages de rapport 2,8 x 10.

Soit un rapport total de 5600.

Le mouvement, en partant du barillet désarmé est remonté à +24 heures (3,5 tours de barillet) pour environ quatre heures d'exposition du moulinet au flux d'une lampe IR (E $\simeq$ 6000 lux)

B/ Entretien d'un pendule de torsion.

1/ Principe.

On applique à l'oscillateur un couple moteur radiométrique (à chaque période et au voisinage du point mort)

Cette impulsion est commandée par une cellule photoélectrique qui reçoit le faisceau lumineux réfléchi par un miroir porté par le pendule ; la cellule contrôle ensuite par circuits appropriés le faisceau lumineux moteur.

Il est nécessaire :
a/ de communiquer une impulsion toutes les deux oscillations simples
b/ de prolonger l'action de la cellule, le faisceau moteur agissant pendant quelques secondes

Dispositif employé.

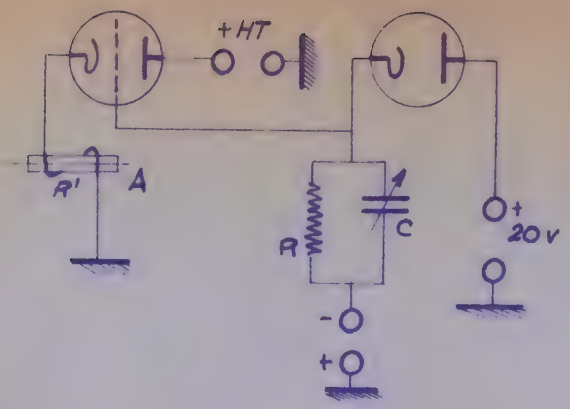
Il est constitué par un circuit électronique classique à bascule bistable commandée par une photodiode, un circuit dérivateur et une diode. On attaque ensuite un amplificateur à courant continu en commande par tout ou rien et dont le temps de déblocage est déterminé par la constante de temps d'un circuit RC. L'amplificateur actionne finalement le relais de commande du faisceau lumineux moteur. Ce montage constitue une solution assez simple dotée d'une grande sécurité de fonctionnement.

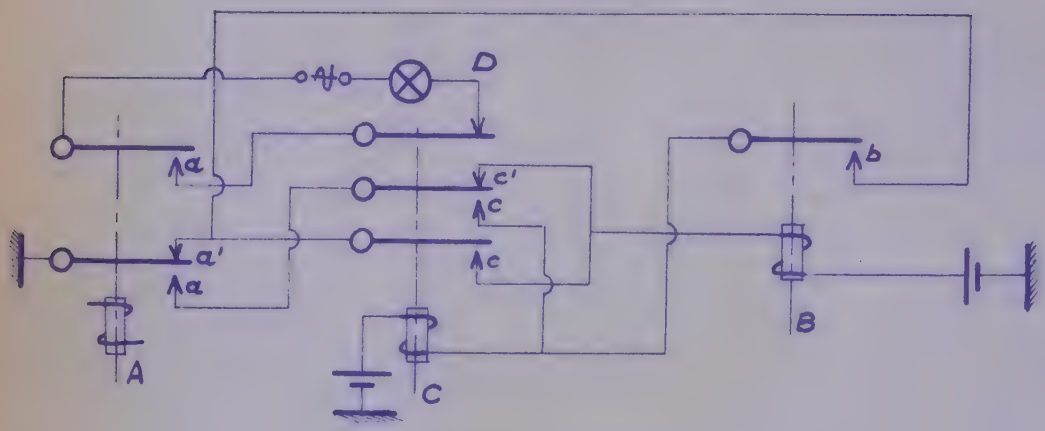
Deuxième dispositif.

La photodiode OAP 12 commande un relais par l'intermédiaire d'un amplificateur.

Dès que le faisceau lumineux a quitté la cellule, un certain temps de fonctionnement du relais est obtenu par un circuit RC.

FIG.9





	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
A	—					—					—					—
B	—	—	—	—	—						—	—	—	—	—	
C		—	—	—	—	—						—	—	—	—	—
D	—										—					

En agissant sur C et sur la tension de polarisation, on obtient un retard au collage de quelques 1/100 de sec et au décollage de plusieurs secondes.

Le circuit de commande du faisceau lumineux moteur à partir du relais A est purement électromécanique et obéit au diagramme de la fig.9.

Remarque : Les traits pleins représentent les intervalles de temps pendant lesquels les relais fonctionnent et les notations employées sont celles de l'algèbre de BOOLE. Le dispositif est assez compliqué et il présente tous les défauts des circuits à relais.

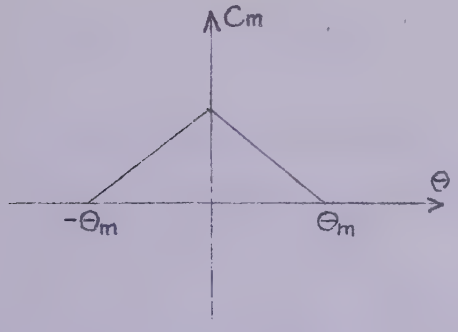
2/ Couple moteur.

Le calcul de l'éclairement nécessaire est élémentaire (lumière blanche). Le bilan énergie perdue par période et fournie par effet radiométrique s'écrit :

$$\delta \frac{GI}{L} \theta_o^2 = C_m \theta_m$$

C_m couple radiométrique
θ_m angle d'impulsion

Le diagramme du couple moteur est le suivant:



C_m est appliqué à $\theta = -\theta_m$. L'effet n'est pas instantané et sa variation avec θ est linéaire. On convient de couper le flux pour $\theta = 0$. Le refroidissement se fait alors progressivement et C_m est symétrique par rapport à θ.

(C_m fonction paire de l'élongation : pas de perturbation de période, pas de marche avec l'amplitude dûe à l'entretien au second ordre près.)

Données numériques.

Le pendule est équipé avec une ailette sensible à la lumière

$T \simeq 60$ à 10^{-2} mm Hg, $\delta \simeq 2.10^{-3}$

GI = 300 dynes cm/rad/cm ; L = 12

$\theta_o = \frac{\pi}{6}$ $\theta_m \simeq 9.10^{-2}$ (θ_m correspond sensiblement à 2 sec)

$C_m = r S p$ (S = 12 ; r = 3) p pression radiométrique

soit $p = 5.10^{-3}$ dynes/cm^2

Or, la pression radiométrique est maximum en 15 sec (valeurs indiquées précédemment) d'où :

p réel $\simeq 3.10^{-2}$ dynes/cm^2

L'éclairement nécessaire avec une ailette du type 3 est de 800 lux. Expérimentalement on obtient une amplitude stable voisine de 30° pour un éclairement de 1000 lux.

3/ Conclusions.

Quel intérêt présente un tel type d'entretien ?

- Le rendement sera toujours faible. En admettant que l'oscillateur soit scellé sous un vide voisin de p_o (techniquement assez aisé à réaliser pour $p_o \simeq 10^{-2}$ mm) l'appareillage extérieur d'entretien et de comptage est onéreux.

- Le couple radiométrique présente un maximum aigu en fonction de la pression. Il en résulte une mauvaise stabilité d'amplitude, donc de période.

- Le réglage fin de la marche est délicat. Un couplage magnétique modifiant la longueur active de la suspension ou le moment d'inertie constitue une solution compliquée.

- La marche ne sera guère inférieure à celle d'un pendule de torsion entretenu mécaniquement.

C'est le caractère spectaculaire d'un tel dispositif qui a retenu notre attention. Nous voyons réapparaître chez les horlogers bijoutiers des moulinets de CROOKES absolument identiques à ceux présentés il y a une trentaine d'années. Sans gros supplément de prix, un entretien de mouvement de montre ou de pendule par action directe sur le barillet attirerait davantage l'attention du public.

III - PRESSION DE RADIATION.

La théorie électromagnétique montre que toute onde transporte une certaine quantité d'énergie par unité de volume représentée par le vecteur de Poynting.

La pression de radiation peut être interprétée comme la résultante des forces exercées sur les électrons contenus dans un corps par le champ électromagnétique du rayonnement.

Quelques rappels historiques.

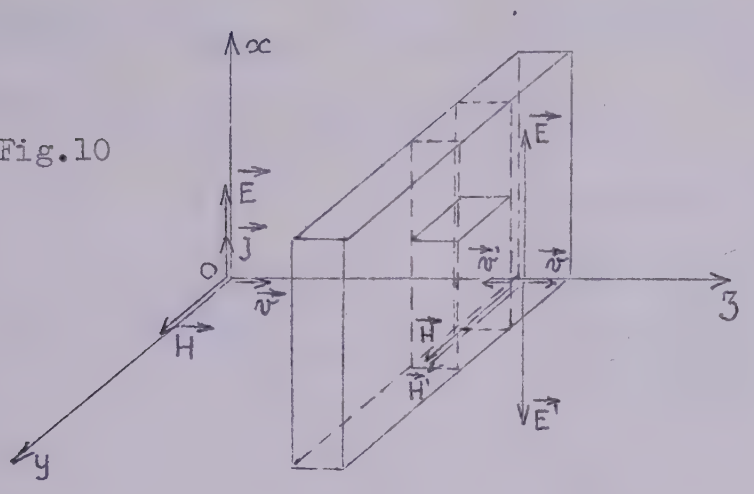
KEPLER en 1619 avait déjà songé à l'existence d'une pression de la lumière. Les premières expériences furent tentées par de MAIRAS et DUFAY en 1754 sans aucun résultat. De même pour FRESNEL, ZOLLNER, BARTOLI et CROOKES. LEBEDEW (1900) a le permier mis en évidence l'existence de cette pression. NICHOLS et HULL, de leur côté, en 1901, ont abouti également à des résultats valables. POYNTING en 1904, s'il est cité le dernier, n'en a pas moins le mérite d'avoir mesuré la pression de radiation tangentielle.

De nombreuses références de ces travaux se trouvent dans le traité de Physique de O.D.CHWOLSON traduit par E.DAVAUX, Lib. Scient. Hermann Paris 1909.

A/ Pression de radiation.

Etude théorique dans le cas d'une onde plane polarisée tombant normalement sur la surface d'un réflecteur parfait. (fig.10)

Fig.10



Onde plane se propageant dans la direction Oz.

Densité de courant.

$\overrightarrow{rot}\ \vec{H} = \vec{j}$

$\vec{H}$ est uniquement fonction de z.

$Hx = Hz = 0$

$Hy \neq 0$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}$ se réduit à :

$$-\frac{\partial Hy}{\partial z} = j_x$$

Si $H = H_o \sin \omega(t - \frac{z}{c})$, $\qquad j_x = -\frac{\omega}{c} \cos \omega(t - \frac{z}{c})$

D'autre part $\vec{E} = \rho \vec{j}$. Considérer le plan comme réflecteur parfait revient à dire que $\rho = 0$ (ou $\gamma = \infty$)

On remarque que dans le plan réflecteur $\vec{j}$ est fini bien que $\vec{E}$ soit nul.

On sait qu'il y a réflexion avec changement de phase de π pour le champ électrique

soit $\vec{E}$ pour l'onde incidente
$\vec{E}'$ pour l'onde réfléchie $\qquad \vec{E} = -\vec{E}'$

On sait également que $\vec{H} = \vec{H}'$

En avant du miroir présence d'une onde stationnaire : noeud pour $\vec{E}$ sur le miroir, ventre pour $\vec{H}$.

Sur le réflecteur

$\vec{f} = i\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \mu_o\, i\, d\vec{\ell} \wedge \vec{H}$

$i = \int j\, ds \qquad ds = y\, dz$ pour $y = 1$

f pour $d\ell = x = 1$, c'est-à-dire sur un élément de surface unitaire orienté par Oz, donc une pression p.

$p = \mu_o \vec{j} \wedge \vec{H}\, dz \qquad |j| = \frac{\partial Hy}{\partial z}$

$p = \frac{\mu_o}{2} H_p^{\,2}$, H_p étant le champ magnétique dans le plan réflecte

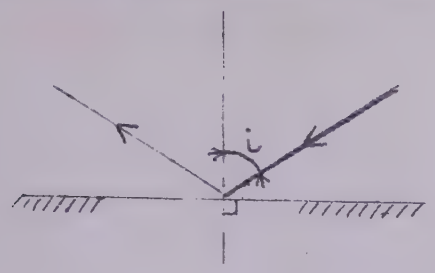
et $p = 2 \mu_o H^2$

Densité d'énergie de l'onde incidente : $1/2(\mu_o H^2 + \varepsilon_o E^2) = \mu_o H^2$

Donc, dans le cas d'une réflexion normale sur un plan parfaitement réflecteur, la pression exercée par un faisceau lumineux est égale au double de la densité d'énergie de l'onde incidente.

Dans le cas d'une incidence normale sur un plan parfaitement absorbant, on peut établir un raisonnement analogue : la pression de radiation est égale à la densité d'énergie du faisceau incident.

Incidence oblique - Pouvoir réflecteur ρ



u densité d'énergie incidente

Reçu par unité de surface : u cos i

réfléchi " " " : ρ u cos i

Variation normale de la quantité de mouvement.

$$p_n = (1+\rho)u \cos^2 i$$

Variation tangentielle.

$$p_t = (1-\rho)u \sin i \cos i$$

Si $\rho = 0$, $p_n = u \cos^2 i$; $p_t = \frac{u}{2} \sin 2i$

$\rho = 1$, $p_n = 2u \cos^2 1$; $p_t = 0$

Un faisceau de radiations arrivant sur une surface doit donc la repousser comme le ferait un bombardement matériel.

Les forces en jeu sont très faibles. Pour le rayonnement solaire, ordre de grandeur de cette pression : en été, au zénith, énergie incidente $0,1 W/cm^2$.
densité d'énergie : $u = 0,1.10^7/3.10^{11} = 3,5.10^{-5}$ dynes/cm^2

Sur un miroir de 1 cm^2 : poussée de 7.10^{-5} dynes.

B/ Mesure de la pression de radiation.

Principe : On dirige un faisceau lumineux sur une ailette portée par une balance de torsion. La difficulté provient de la petitesse des forces mises en jeu.

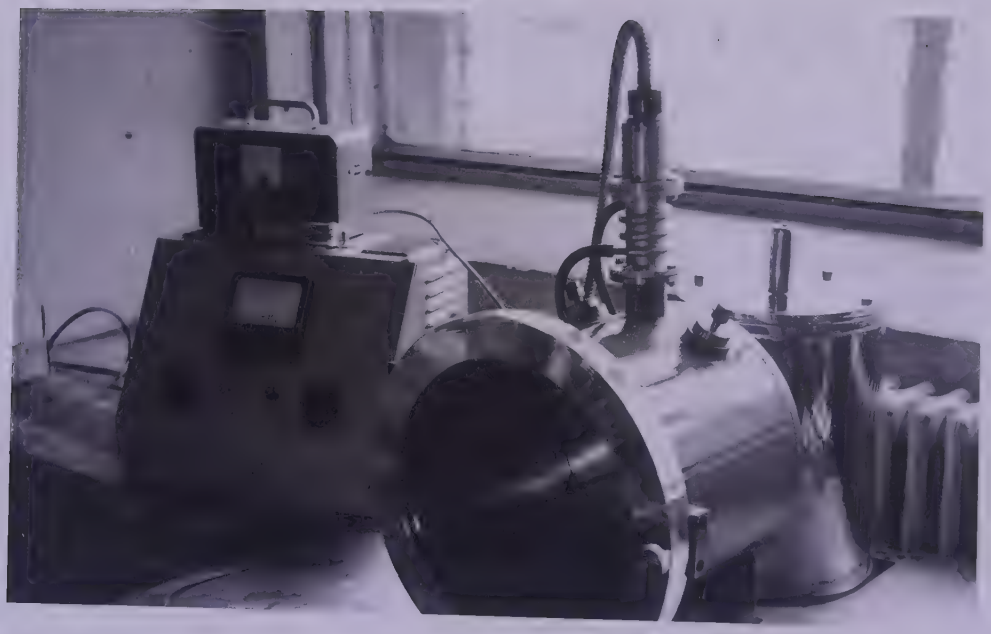
Beaucoup de phénomènes sont susceptibles de perturber la mesure et nous avons éprouvé d'assez grandes complications pour mener à bien les expériences.

1/ Pression radiométrique

Elle est avec le même faisceau lumineux de l'ordre de 1000 fois plus importante que la pression de radiation. Pour l'éliminer (autant qu'il est possible),

a) le vide doit être particulièrement poussé.

Le premier groupe de pompage utilisé a été équipé avec le matériel existant à l'Institut de Chronométrie. Il convenait parfaitement pour



l'étude du phénomène radiométrique mais son vide limite se situe au voisinage de 10^{-5}mm, ce qui est nettement insuffisant.

Un second groupe plus puissant a donc été envisagé (cf. photographie fig.11). La pompe primaire à un étage a un débit de 25m^3/h La pompe secondaire est une pompe à diffusion fractionnante EDWARDS de 600 l/sec.

Les canalisations et dispositifs de vide primaire ont été réalisées entièrement à l'Institut de Chronométrie. Pour le vide secondaire (baffle, enceinte et piège à azote liquide) le matériel provient de la Sociéré Vacuum Applied Paris et de notre laboratoire.

Avec une charge d'azote liquide de cinq litres (tenue 12 h) on obtient sans dégazage préalable un vide de 10^{-6}mm de Hg après 4 h de pompage, ce qui est très satisfaisant.

b) la pression de radiation agit instantanément. Par contre, les forces radiométriques mettent un certain temps avant d'atteindre leur maximum. Une méthode balistique de mesure est donc intéressante.

Théorie : Pendule de torsion dont la masse pendulaire est constituée par l'ensemble de l'équipage mobile sensible à la lumière. On applique un couple moteur C_m pendant une certaine fraction de la période et on cherche l'amplitude prise par le pendule.

Notations habituelles.
Equation du mouvement avec C_m appliqué :

$$A\Theta'' + 2a\,A\,\omega_o\Theta' + A\omega_o^2\Theta = C_m$$

$$\Theta'' + 2a\omega_o\Theta' + \omega_o^2\Theta = M$$

$$\Theta = e^{-a\omega_o t}\left(A_1 \cos \omega_o \sqrt{1-a^2}\, t + B_1 \sin \omega_o \sqrt{1-a^2}\, t\right) + \frac{M}{\omega_o^2}$$

Conditions initiales : $t = 0$; $\Theta = 0$; $\Theta' = 0$, soit :

$$\Theta = \frac{M}{\omega_o^2}\left[1 - e^{-a\omega_o t}\cos \omega' t - e^{-a\omega_o t}\,\frac{a}{(1-a^2)^{1/2}} \sin \omega' t\right]$$

avec $\omega' = \omega_o \sqrt{1-a^2} = \frac{2\pi}{T}$

a petit et $\Theta \simeq \frac{M}{\omega_o^2}\left[1 - e^{-a\omega_o t}\cos \frac{2\pi t}{T}\right]$

si $t = T/4$ $\qquad \Theta = M/\omega_o^2$

Pour $t = T/4$ on supprime C_m; l'équation du mouvement devient :

$$\Theta'' + 2a\omega_o\Theta' + \omega_o^2\Theta = 0$$

$$\Theta = A\, e^{-a\omega_o t}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)$$

A et α sont déterminés par les conditions initiales, soit :

$$t = T/4 \; ; \; \Theta = \frac{M}{\omega_o^2} \; ; \; \Theta' = \frac{M}{\omega_o^2}\,\omega'\, e^{\frac{-a\omega_o t}{4}}$$

soit $\Theta = \frac{M\sqrt{2}}{\omega_o^2}\left[1 + \frac{a}{2}(1+\frac{\pi}{2})\right] e^{-a\omega_o t} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)$

si $a \neq 0 \; ; \; \alpha \neq \pi/4$

si a petit

$$\Theta \simeq \frac{M\sqrt{2}}{\omega_o^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi/4\right)$$

c) le faisceau lumineux traverse un <u>filtre extérieur</u> absorbant les longueurs d'onde susceptibles d'échauffer le hublot de l'enceinte.

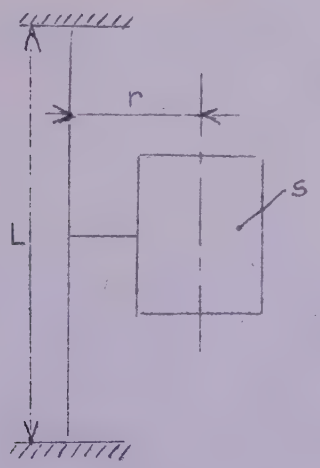
d) les ailettes sont <u>aussi réflechissantes</u> que possible non seulement pour augmenter la pression de radiation mais pour diminuer leur échauffement ; <u>leur épaisseur est faible</u> afin d'atténuer la différence de température entre les faces (métal à haute conductibilité thermique : cuivre ou argent)

2/ <u>Mouvements parasites</u>

La grande sensibilité de l'équipage de mesure et le vide poussé rendent les moindres vibrations très gênantes (montage de pompe primaire sur amortisseurs, raccords par longues canalisations etc...)

3/ <u>Expériences</u>.

Le détecteur est une balance de torsion à fil tendu entre deux encastrements. L'équipage mobile doit être soigneusement équilibré et calé. La déviation est lue par la méthode de POGGENDORF.



<u>Méthode statique</u>

$$C_m = \frac{4GI}{L}\,\Theta$$

Lecture $x = 2\Theta D$

soit $x = \frac{DL}{2GI}\,C_m$

Pour une ailette plane de cuivre polie mécaniquement

$$\rho \simeq 0{,}8$$

$$p = (1+\rho)\,\frac{10^{-5}}{3}\,E_{\text{lumen/cm}^2}$$

(en prenant 1 lumen $\simeq 10^5$ ergs)

$$x = \frac{DL}{2GI}\,rSp$$

Données (CGS) $D = 100$; $L = 15$; $GI = 3.10^{-2}$; $r = 2$; $S = 4$

$x = 2.10^5 p$

Méthode balistique.

Le pendule étant au repos à $t = 0$ on applique C_m

pour $t = T/4$: $C_m = 0$

avec les mêmes valeurs que précédemment $x = 2\sqrt{2}.10^5 p$

Cette méthode est la seule utilisée. Si C_m est appliqué pendant T/2, on a un échauffement double et :

$$\frac{\theta\ T/4}{\theta\ T/2} \simeq \frac{7}{10}$$

donc un gain bien faible de sensibilité.

Source : lampe à incandescence normale. Eclairement sur ailette 15 000 lux, soit 1,5 lumen/cm^2 . Vide : 2.10-6 (jauge à ionisation)

Avec les données précédentes : $x = 2,5$. Expérimentalement, nous obtenons $x = 3$, c'est-à-dire une erreur de 20/100 ce que l'on pouvait prévoir par suite de nombreuses incertitudes (en particulier celle concernant l'énergie incidente).

4/ Applications.

Notre première intention était de suivre l'idée de M.René PLANIOL (Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, séance du 19-11-1928) Un pendule de torsion à fil de quartz placé dans un vide moléculaire possède un amortissement très faible. Le bilan énergétique montre qu'il est possible de l'entretenir par la pression de radiation.

D'après les expériences effectuées par l'auteur de cette note, la pression dans l'enceinte était de l'ordre de 5.10^{-4}mm la nuit et 4.10^{-5}le jour.

Le pendule est lancé avec $\theta_o = 0,127$ rad ; le 15ème jour, il a encore une amplitude de $2,3.10^{-2}$rad; sa période étant de 11 secondes.

pour θ moyen $1,15.10^{-1}$ rad : $\delta = 2,5.10^{-5}$

θ_m $8,8.10^{-2}$: $\delta = 1,65.10^{-5}$

θ_m $2,7.10^{-2}$: $\delta = 5,5.10^{-6}$

Energie perdue par période :

$$\mathcal{E} = -\delta A \omega_o^2 \theta_o^2 \text{ ; avec } A \simeq 1,5.10^4 \text{ CGS}$$

pour $\theta = 10^{-1}$ rad : $\mathcal{E} = 10^{-3}$ergs , Puissance consommée $\simeq 10^{-4}$erg/sec

$\theta = 5.10^{-2}$: $\mathcal{E} = 2.10^{-4}$, Puissance consommée $\simeq 2.10^{-5}$erg/sec

Cherchons à la rendre minima.

a) $A\omega_o^2 = \frac{GI}{L}$ soit, pour une masse pendulaire donnée, une suspension à faible couple de torsion et de grande longueur.

b) δ décrément global des oscillations

Frottement dû à l'air.

Le coefficient de viscosité de l'air est très petit à 10^{-6} mm de mercure. Les formules et résultats expérimentaux sont donnés au troisième chapître.

Frottement interne de la suspension.

La silice pure fondue possède un frottement interne très minime. Sa viscosité est 1000 à 10.000 fois plus faible que celle de l'or ou du platine. Son emploi est particulièrement indiqué en ce cas.

Nos expériences n'ont abouti à rien de positif dans ce domaine

a) la fragilité des fils de 0,1 ou 0,2mm de ∅ rend toute manipulation délicate,

b) un encastrement correct et un bon centrage dans la masse pendulaire sont nécessaires. Des pinces réalisées avec le plus grand soin permettent de satisfaire à la deuxième condition mais elles ne peuvent être serrées suffisamment et il y a très rapidement rupture par effet d'entaille.

Un encastrement par pince puis scellement à l'araldite ou au ciment de dentiste n'a pas donné de meilleurs résultats.

L'utilisation de fils prolongés à chaque extrémité par des cylindres de quartz de ∅ 1 à 2mm a été envisagée.

Le serrage pouvait alors être énergique; mais la concentricité entre fil et cylindre était très mauvaise, d'où mouvements parasites et rupture.

Les délais de livraison très longs ont limité le nombre des essais. Ils doivent donner satisfaction si la qualité des fils s'améliore.

Cependant, sans utiliser des fils de silice, il doit être possible d'obtenir des fils métalliques donnant un amortissement faible. C'est une question de métallurgie, de traitement thermique, de temps et de ... chance.

5/ Conclusions.

Aucun oscillateur équipé d'une suspension à fil métallique ne nous a donné un décrément assez petit. Tout au plus a-t-on obtenu $\delta = 10^{-5}$ sous vide, valeur trop importante pour qu'un entretien soit possible avec une énergie lumineuse raisonnable.

Ainsi dans les conditions suivantes :

$T = 60$
$A = 3.10^3$ il faut déjà 4 lumen/cm^2 appliqués toutes les périodes pendant 5° sur une ailette polie de 6 cm^2
$\delta = 2.10^{-5}$
$\theta_o = 0,26$ rad $\alpha 15°$ (On peut choisir un entretien par pression normale ou tangentielle)

En résumé le rendement restant toujours excessivement faible, ce procédé nécessite :

- une puissance lumineuse élevée
- un vide moléculaire permanent

Il en résulte des échauffements importants et ce curieux dispositif d'entretien ne se justifie plus dans l'évolution actuelle des techniques.

Bibliographie.

Pression radiométrique

[1] Instruments et méthodes pour la mesure de l'énergie rayonnante
J.LECOMTE - Techniques générales du Laboratoire de Physique
Tome II - Editions du C.N.R.S. (1950)

[2] H.BOUASSE - Hydrostatique p.448 et suiv.
Librairie Delagrave Paris 1923

[3] A.BLANC - Rayonnement éclairage - Collection Armand Colin

Travaux anciens.

CROOKES - Mémoire présenté à la Société Royale en 1875
"Des attractions et répulsions qui résultent de la radiation"

W.WESTPHAL - Ver deutsch. phys. Ges. 1919, 21 129-144
Zts.f.phys. 1920 , 1 , 92-100
" " 1920 , 1, 431-438
1921 , 4 , 221-226

W.GERLACH et coll. Zts.f. Phys. 1923 , 14, 284-290
1923 , 15, 1-7
1924 , 21, 254-257
1932 , 78, 43-58

Ver.deutsch.phys.Ges. 1919, 21, 218-226

G.HETTNER . Zts.f.Phys. 1924, 27, 12-22
1928, 47, 449-508

O.SANSWICK - Opt.Soc. of Amer. (Journal) 1926, 12, 353-359

G.G.ABBOT , W.H.HOOVER et L.B.CLARCK - Smith. Miscell. Collect. 1945
104, 1-6

Pression de radiation

LEBEDEW - Pression de la lumière . Lib. Blanchard Paris 1926

CHAPITRE 3

VISCOSITE DE L'AIR EN FONCTION DE LA PRESSION

Méthode du disque oscillant de Maxwell

Ayant à notre disposition un équipement à vide moléculaire et une certaine expérience concernant le pendule de torsion, nous avons pensé qu'il serait intéressant de faire une étude expérimentale de la viscosité de l'air dans un large domaine de pressions (760 mm, 10^{-5} mm de Hg)

Rappels concernant la théorie de la viscosité.

L'interprétation du frottement interne dans un gaz remonte aux travaux de Maxwell sur la théorie cinétique.

Par définition le coefficient de viscosité est donné par :

$$\tau = \eta_1 \left(\frac{dv}{dx}\right) + \eta_2 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \dots \quad ,$$

relation générale entre τ, tension de cisaillement par unité de surface et le gradient des vitesses relatives de 2 surfaces.

En ne prenant que le premier terme on obtient la formule de Newton :

$$\tau = \eta \frac{dv}{dx} \qquad (1)$$

η étant le coefficient de viscosité dynamique ($ML^{-1}T^{-1}$)

En termes de théorie cinétique, un calcul approché de η conduit à l'expression :

$$\eta = k\varrho v \ell$$

avec :
- $k = 0{,}33$ (plus rigoureusement $k = 0{,}3503$)
- ϱ : densité
- v : vitesse moyenne des molécules
- ℓ : libre parcours moyen

Conséquences : a) η doit être indépendant de la pression (au moins dans un assez large domaine autour de la pression normale)

b) η doit être proportionnel à v c'est-à-dire à $\sqrt{T}$ (T température absolue). La variation de η est en réalité plus rapide avec T que $\sqrt{T}$ et l'on se reportera à la loi de Sutherland pour tenir compte de la température .

Diverses méthodes de mesure de la viscosité des gaz.

On peut distinguer deux groupes de procédés I et II

I - 1/ étude des oscillations

2/ étude du mouvement de petites gouttes liquides dans un gaz

1/ a) oscillations du pendule circulaire

Ce sont les plus anciennes expériences et elles ont été effectuées dans un but chronométrique : influence de la viscosité sur la période.

Les solutions mathématiques dûes à STOKES et MEYER [1] permettent de déduire le coefficient de viscosité de la perte d'amplitude.

b) oscillations pendulaires de la sphère et du cylindre

Les difficultés analytiques sont grandes et le procédé peu employé.

c) pendule de torsion

La théorie mathématique exacte est également difficile. On peut toutefois se rapprocher plus aisément du phénomène réel par approximations convenables et les solutions envisagées conduisent à des calculs simples.

Hypothèse fondamentale : Les couches gazeuses sont entraînées dans un mouvement de rotation d'ensemble autour de l'axe du pendule.

Les essais montrent qu'à l'exception des faibles vitesses on obtient une superposition de deux mouvements, le second étant perpendiculaire à l'axe du pendule.

Ce procédé se prête bien à l'étude de la dépendance de la pression.

2/ Mouvement des gouttes.

On étudie le mouvement de petites gouttes d'huile entre les plateaux d'un condensateur. Cette méthode a été mise au point par MILLIKAN (1915); la viscosité étant déduite de la vitesse limite entre les plateaux.

II - Méthode de POISEUILLE

La formule de l'écoulement d'un gaz dans un capillaire a été établie par MEYER.

Les hypothèses de calculs sont :

- régime laminaire et mouvement permanent
- η indépendant de p et ρ proportionnel à p
- faible variation de ρ le long du tube

Ce procédé a été fréquemment employé. Il est surtout intéressant pour l'étude de la variation de η avec la température.

Méthode du pendule de torsion

Un pendule libre est soumis à des couples résistants produisant une perte d'amplitude des oscillations.

L'amortissement a surtout pour cause :

- le frottement interne du fil de torsion
- le frottement visqueux (régime laminaire) du fluide

Le frottement interne provoqué par l'hystérésis mécanique est une fonction de la déformation c'est-à-dire de l'amplitude. On doit donc s'astreindre à effectuer les mesures au voisinage d'une amplitude moyenne constante.

Le choix du fil de suspension a une importance considérable. Il est nécessaire d'effectuer un vieillissement et une stabilisation de ses caractéristiques en le traitant thermiquement et en le faisant "travailler" plusieurs mois avant son utilisation.

Il faut également rechercher un frottement interne faible afin de réduire au minimum les causes d'erreur provenant de la suspension.

La silice pure fondue donnerait de bons résultats mais son utilisation est trop délicate et nous avons obtenu des essais satisfaisants avec un élinvar Imphy.

La perte d'énergie dans la suspension est indépendante de la pression. (Des essais sous vide élevé pendant un temps assez long - 24 h - semblent modifier légérement l'amortissement interne. On peut évidemment émettre l'hypothèse d'un dégazage mais les variations ne sont que de quelques % et les expériences doivent être conduites avec plus de précision pour envisager ce phénomène avec certitude).

Ce terme peut donc être déterminé en effectuant une mesure à la limite des possibilités du groupe de pompage.

Frottement visqueux - Influence du fluide entraîné sur l'amortissement

Etude mathématique

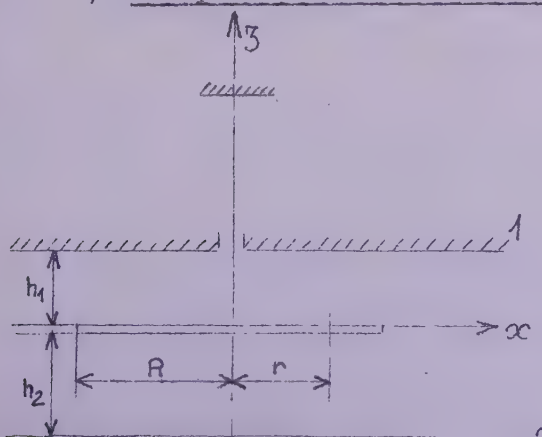
Une solution théorique simple est donnée par H.BOUASSE [2] . Nous la reprenons ici de façon plus générale et en complétant certains développements.

Nous étudions successivement les deux cas suivants :

A) disque infiniment mince, cylindre infiniment long } milieux illimité et limité à partir de l'équation hydrodynamique des gaz

B) dique infiniment mince, cylindre infiniment long } milieu limité. Solution approchée utilisée pour nos expériences.

A - 1/ Disque infiniment mince oscillant dans un milieu limité



Soit $\Theta = \Theta_0 \sin \omega t$ le mouvement du disque (oscillations supposées sinusoïdales et non amorties)

Nous considérons pour l'instant le frottement entre la face supérieure du disque et le plan fixe 1 et nous ne tenons pas compte de l'influence des bords.

Nous supposons l'existence d'un régime laminaire.

Soit Ω la vitesse du fluide entraîné. Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \Omega = 0 \text{ pour } z = h_1 \\ \Omega = \Theta' \text{ pour } z = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Nous cherchons à intégrer l'équation hydrodynamique des gaz avec les conditions imposées (2)

soit $\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}$ (3) η viscosité dynamique absolue

ρ masse spécifique

Intégration.

Nous procédons par la méthode de séparation des variables. Nous cherchons pour $\Omega(z,t)$ une solution de la forme $\Omega = g(z)e^{i\omega t}$

dans (3) nous obtenons : $\frac{d^2 g}{dz^2} = \frac{i\omega\rho}{\eta} g$

et $g(z) = A'e^{(1+i)\lambda z} + A''e^{-(1+i)\lambda z}$ avec $\lambda = \sqrt{\frac{\pi\rho}{\eta T}}$ (4)

$$\Omega(z,t) = A'e^{\lambda z}e^{i(\omega t+\lambda z)} + A''e^{-\lambda z}e^{i(\omega t-\lambda z)}$$

On pose : $\Omega = A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3 + A_4\Omega_4$ (5)

avec :

$$\begin{cases} \Omega_1 = e^{\lambda z}\cos(\omega t+\lambda z) \\ \Omega_2 = e^{\lambda z}\sin(\omega t+\lambda z) \\ \Omega_3 = e^{-\lambda z}\cos(\omega t-\lambda z) \\ \Omega_4 = e^{-\lambda z}\sin(\omega t-\lambda z) \end{cases} \qquad (6)$$

A_1, A_2, A_3 et A_4 sont déterminés par les conditions aux limites (2). Soit en posant : $\lambda h_1 = u_1$ (7)

$$A_1 = \frac{\Theta_o\omega}{2} \frac{\cos 2u_1 - e^{-2u_1}}{\cos 2u_1 - \operatorname{ch} 2u_1} \qquad A_3 = \frac{\Theta_o\omega}{2} \frac{\cos 2u_1 - e^{2u}}{\cos 2u_1 - \operatorname{ch} 2u_1}$$

$$A_2 = \frac{\Theta_o\omega}{2} \frac{\sin 2u_1}{\cos 2u_1 - \operatorname{ch} 2u_1} \qquad A_4 = -\frac{\Theta_o\omega}{2} \frac{\sin 2u_1}{\cos 2u_1 - \operatorname{ch} 2u_1} \qquad (8)$$

Par définition un élément de surface $d\sigma$ du disque est soumis à l'effet tangentiel

$$\tau = \eta r\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)_{z=0}$$

Après dérivation par rapport à z :

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_{z=0} = \lambda\omega\Theta_o\left[\sin\omega t\ \frac{\operatorname{sh} 2u_1-\sin 2u_1}{\operatorname{ch} 2u_1-\cos 2u_1} - \cos\omega t\ \frac{\sin 2u_1+\operatorname{sh} 2u_1}{\operatorname{ch} 2u_1-\cos 2u_1}\right]$$

Couple résistant correspondant à la surface supérieure du disque

$$dC = \eta\, r^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_{z=0} d\sigma \qquad \text{avec } d\sigma = 2\pi r dr$$

$$C_1 = \frac{\pi R^4}{2}\,\eta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_{1\,z=0}$$

Pour les deux faces :

$$C_r = C_1+C_2 = \frac{\pi R^4}{2}\eta\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_{1\,z=0} + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_{2\,z=0}\right] \qquad (9)$$

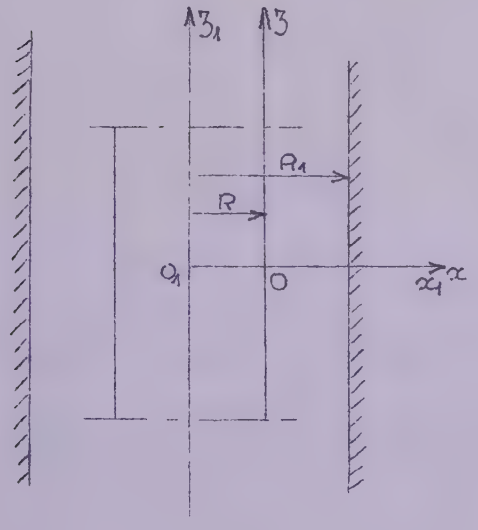
en posant : $\quad c = \dfrac{\sin 2u}{\operatorname{ch} 2u-\cos 2u} \quad ; \quad b = \dfrac{\operatorname{sh} 2u}{\sin 2u} \qquad (10)$

$$C_r = \frac{\pi R^4 \lambda\,\eta}{2}\left[-\frac{\Theta''}{\omega}(c_1b_1-c_1+c_2b_2-c_2) - \Theta'(d_1+c_1b_1+c_2+c_2b_2)\right] \qquad (11)$$

dans le cas où $h_1 = h_2 = h$

$$C_r = -\pi R^4\lambda\eta C\left[\frac{\Theta''}{\omega}(b-1) + \Theta'(1+b)\right]$$

2/ <u>Cylindre infiniment long oscillant dans un milieu limité</u>



Soit R le rayon du cylindre oscillant,

R_1 le rayon de l'enceinte.

Les conditions aux limites sont maintenant :

$$\begin{cases} \Omega = \Theta' & \text{pour } x_1 = R \text{ ou } x = 0 \\ \Omega = 0 & \text{pour } x_1 = R_1 \text{ ou } x = R_1 - R = R_2 \end{cases} \qquad (12)$$

Les équations précédentes restent valables en remplaçant z par x et u par v avec :

$$v = R_2\lambda \qquad (13)$$

L'effort tangentiel sur un élément $d\sigma$ de surface latérale du cylindre est : $\tau = \eta R\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_{x=0} d\sigma$

correspondant au couple élémentaire : $dC = \eta R^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_{x=0} d\sigma$

et $C = 2\pi R^3 \ell \eta \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_{x=0}$ ℓ étant la longueur du cylindre

en posant : $d = \frac{\sin 2v}{\text{ch } 2v - \cos 2v}$ et $e = \frac{\text{sh } 2v}{\sin 2v}$ (14)

$$C_r = -2\pi R^3 \ell \eta \lambda d \left[\frac{\theta''}{\omega}(e-1) + \theta'(1+e)\right] \quad (15)$$

3/ Equation générale du mouvement du pendule

Pour le pendule placé :

- en milieu idéal : $A\theta'' + A\omega_o^2 \theta = 0$ (16)

avec A moment d'inertie par rapport à Oz et $\omega_o^2 = \frac{k}{A}$

- en milieu visqueux : $\theta''(A+\Delta A) + 2aA\omega_o\theta' + A\omega_o^2\theta = 0$ (17)

avec : $\Delta A = \frac{\pi R^3 \lambda}{\omega} \eta \left[2\ell d(e-1) + Rc(b-1)\right]$ (18)

et $2aA\omega_o = \pi R^3 \lambda \eta \left[\frac{2\ell}{\eta}(e+1) + Rc(b+1)\right]$

ou $\delta = 2\pi a = \frac{\pi R^3 \lambda \eta T}{2A}\left[2\ell d(e+1) + Rc(b+1)\right]$ (19)

4/ Cas du milieu illimité.

Les conditions aux limites sont respectivement :

disque $\begin{cases} \Omega = 0 \text{ pour } z = \infty \\ \Omega = \theta' \text{ " } z = 0 \end{cases}$ (20) cylindre $\begin{cases} \Omega = 0 \text{ pour } x = \infty \\ \Omega = \theta' \text{ " } x = 0 \end{cases}$ (21)

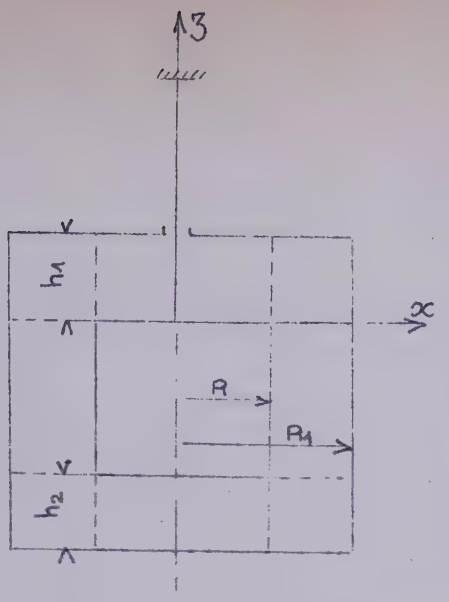
soit : $u = \infty$ $v = \infty$ d'où $\begin{cases} c = d = 0 \\ de = cb = 1 \end{cases}$ (22)

et $\Delta A = \frac{\pi R^3}{\omega} \lambda \eta \left[2\ell + R\right]$ (23)

$$2aA\omega_o = \pi R^3 \lambda \eta \left[2\ell + R\right] \quad (24)$$

B - Solution plus approchée dans le cas du milieu limité.

Hypothèse : Le gaz se comporte comme s'il adhérait à la paroi mobile et la variation de vitesse des couches gazeuses est linéaire entre les surfaces.



1/ Terme visqueux

a/ pour les surfaces de base du cylindre

Soit la face supérieure.

Dans le plan de cote z :

$$\Omega = \theta' \left(\frac{h_1 - z}{h_1}\right) \qquad (25)$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{\theta'}{h_1}$$

Couple élémentaire : $dC_1 = -\frac{2\pi\eta\theta' r^3 dr}{h_1}$

$$C_1 = \int_0^R dc = -\frac{\pi R^4}{2h_1}\eta\theta'$$

soit pour les deux faces $C_1+C_2 = -\frac{\pi R^4}{2}\eta\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right)\theta' \qquad (26)$

b/ pour la surface latérale du cylindre

Notations identiques aux précédentes

On a de la même façon : $\Omega = \frac{\theta'(x-R_1)}{R-R_1} \qquad (27)$

$$dC_3 = \frac{2\pi R^3}{R-R_1}\eta\theta' d\ell$$

$$C_3 = \frac{2\pi R^3}{R-R_1}\ell\eta\theta' \qquad (28)$$

soit $C_{total} = \eta\pi R^3\theta'\left[\frac{2\ell}{R-R_1} + \frac{R}{2}\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right)\right] \qquad (29)$

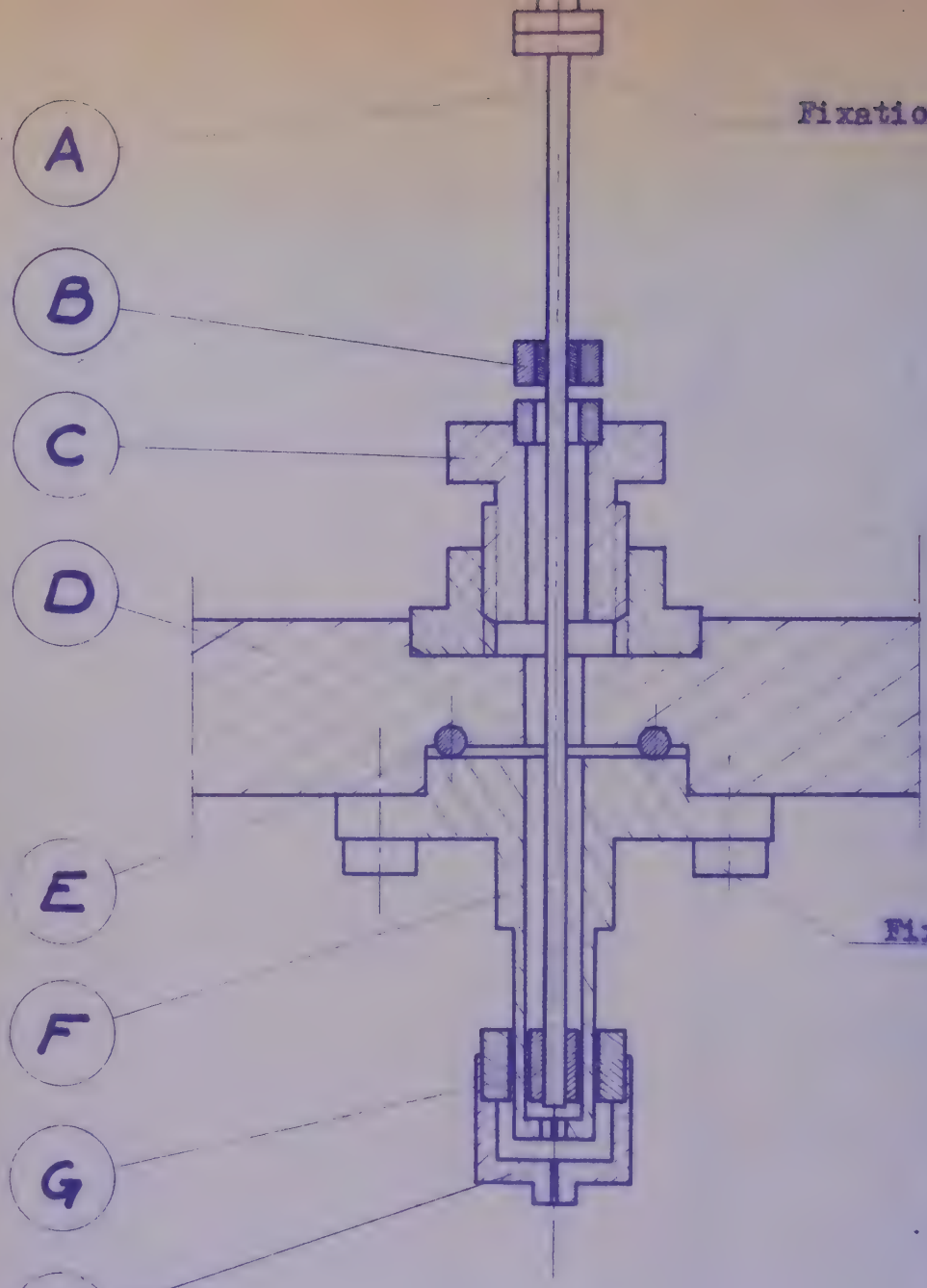
2/ Augmentation du moment d'inertie dûe au fluide entraîné

On évalue l'énergie cinétique d'un petit élément gazeux de masse dm, soit :

$$dI = \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 dm$$

Les intégrations sont élémentaires et conduisent à :

$$\Delta A = \rho\pi\theta'^2\left[\frac{h_1+h_2}{6} + \frac{\ell}{(R-R_1)^2}\left(\frac{R_1^6}{60} - \frac{R^6}{6} + \frac{R^4 R_1^2}{4} - \frac{2R^4 R_1}{5}\right)\right] \qquad (30)$$



AXE DE RADIOMÉTRE

~ = ▽▽ =
▽ = ▽▽▽ =

H		Liaison avec montre
G		accouplement magnétique
F		Bouchon plastique
E		Joint "O"
D		Support
C		Réglage en hauteur
B		Suspension magnétique
A		Tube (centré par pierres et axe Fil)

cotes en mm. — tolérances en microns

matières : spécification n° :

traitement : Dessiné par

assemblage n° Vérifié par :

cotes sans tolérances : Date :

Visa :

Echelle :

N°

Mesure du coefficient de viscosité

Appareil.

La figure 1 représente le montage du pendule de torsion employé. Les données numériques sont les suivantes (CGS)

$T = 74$ sec , A moment d'inertie par rapport à Oz : $4,2.10^3$

$h_1 = h_2 = 1$; $R = 6,5$; $R_1 = 10$; $R' = 3$; $h_3 = 2,4$; $R'' = 3,25$

épaisseur { du disque mobile $e = 0,3$
des plateaux fixes $e' = 0,6$

température $t° = 16° \pm 2°$

La mesure de l'amplitude est effectuée par visée sur un curseur solidaire de la masse pendulaire. Il se déplace devant un disque gradué et permet de lire le 1/4 de degré. (En pratique, on est assuré du 1/2 degré).

Les lectures sont relevées lorsque les oscillations parasites dûes au lancement et au réglage du groupe à vide sont très amorties. (20 mn après manipulations environ).

Le groupe de pompage employé permet d'atteindre 10^{-5} mm de Hg (photographie fig.3). Une mesure à 10^{-6}mm est effectuée avec un autre groupe plus puissant. A cette pression la viscosité ayant presque complétement disparu, le δ_o relevé est considéré comme étant celui dû au fil de suspension.

Décrément des oscillations en fonction de la pression

P en mm de Hg	760	300	100	30	5	1	5.10^{-1}	10^{-1}
$\delta x.10^3$	16,7	16,4	16,3	16,05	15,9	14,25	13,1	10,6

$P_{mm\ Hg}$	5.10^{-2}	10^{-2}	5.10^{-3}	10^{-3}	5.10^{-4}	10^{-4}	$7,5.10^{-5}$	10^{-5}	10^{-6}
$\delta x10^3$	9,5	7,15	6,05	3,55	2,7	2,4	2,35	2,15	1,9

Le décrément logarithmique est calculé avec 15 oscillations pour 760 mm de Hg et un minimum de 60 à 10^{-6}

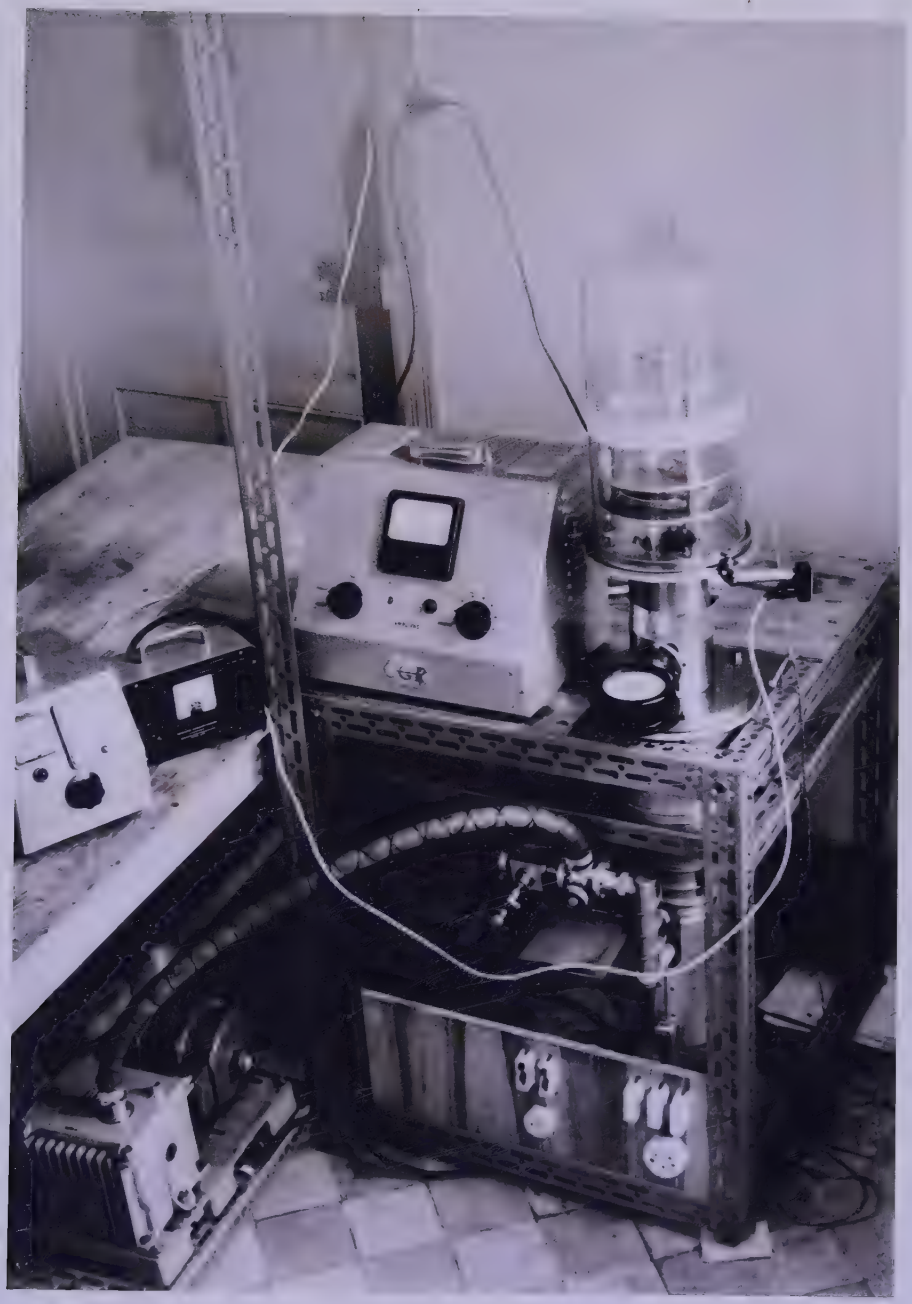
L'erreur relative totale sur δ est de l'ordre de 3%. Un calcul élémentaire montre que

$$\Delta\delta \simeq \frac{2\Delta\Theta}{n\,\Theta}$$

- n nombre d'oscillations complètes
- Θ amplitude du pendule - comprise entre 2000 et 1500 millièmes (10 millièmes = 9/16°) plage dans laquelle le décrément est sensiblement constant à la pression normale mais à court terme.

A titre indicatif nous donnons quelques précisions à ce sujet :

a/ pression 760 mm de Hg : le pendule est lancé 2 heures avant le début des mesures.



Θ compris entre 2810 et 1177,5; pour cinq mesures consécutives de δ ,

$$\delta \text{ moyen} = 12{,}5.10^{-3}$$

b/ pression 760 mm de Hg . Mesures effectuées 1h30 après les précédentes.

Θ compris entre 2735 et 1720 ; pour 3 mesures consécutives de δ ,

$$\delta \text{ moyen} = 12{,}6.10^{-3}$$

c/ pression 10^{-4} mm de Hg . L'ensemble est maintenu sous vide pendant 2 heures, puis on revient à 760mm et à amplitude moyenne égale,

$$\delta \text{ moyen} = 13{,}1.10^{-3}$$

soit un $\Delta\delta$ de 5.10^{-4}.

Quelle est la cause de cette augmentation ? Echauffement, dégazage ; nous n'avons pu conclure à ce sujet. Cet écart se produit dès que l'on cherche un vide assez poussé mais n'a pas lieu jusqu'à 10^{-2} mm

Ce phénomène a toujours été très gênant ; on a dû effectuer des vérifications fréquentes et corriger le δ à une pression donnée en moyennant les écarts.

La précision sur le résultat final est de ce fait inférieure à celle que l'on pouvait escompter avec les moyens de mesure employés.

Coefficient de viscosité.

Le problème est maintenant de savoir quelle méthode nous allons employer pour la détermination de η .

Nous sommes en milieu limité . La solution théorique (A) est assez difficilement maniable; nous devons procéder par approximations successives et pratiquement utiliser une calculatrice.

L'expérience et de nombreux travaux antérieurs montrent que l'on peut utiliser les résultats (B).

Des essais ont été effectués en faisant varier les distances h_1 et h_2 (de 1 à 8 cm). A pression constante, les valeurs du coefficient de viscosité sont identiques dans chaque cas (aux erreurs admissibles près).

Avec les notations employées :

$$C = \eta\pi\Theta'\left[\frac{R^4}{2}\left(\frac{h_1+h_2}{h_1h_2}\right) + \frac{2R^3e}{R_1-R} + \frac{2R'^3e'}{R''-R'} + \frac{2R'^3(h-e')}{R_1-R'}\right]$$

$$= \eta\pi\Theta'\left[P + Q\right]$$

P désignant le premier terme du crochet
Q l'ensemble des trois autres

Soit δ décrément logarithmique global
δ_o " " mesuré à la pression la plus basse et correspondant approximativement au frottement interne de la suspension.

On a $\delta - \delta_o = \frac{\pi T}{2A}\left[P + Q\right]\eta$ $\qquad \boxed{\eta = (\delta - \delta_o)R}$

Remarque : l'application numérique montre que $P \gg Q$

et $\eta \simeq (\delta - \delta_o) \frac{4A}{\pi R^4 T} \left(\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\right)$ formule classique du viscosimètre de Maxwell

Détermination de R.

Les valeurs numériques précédentes donnent $R_t = 1{,}82.10^{-2}$

Expérimentalement nous devons retrouver à la pression normale la valeur classique du coefficient de viscosité de l'air :

$$\text{A } 760\text{mm} \quad \delta - \delta_o = 14{,}8.10^{-3}$$

D'après M. le professeur FORTIER η à 0°C = $1{,}72.10^{-4}$ CGS [3]

et la loi de SUTHERLAND $$\frac{\eta}{\eta_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{1/2} \frac{1 + \frac{C}{T_o}}{1 + \frac{C}{T}}$$

T étant la température absolue et C = 113 à 0°C

$$\eta \ (16\,°C,\ 760\text{mm}) = 1{,}8.10^{-4} \text{ CGS}$$

(Résultats en accord avec ceux de KUNDT et WARBURG)

D'où expérimentalement $R_e = 1{,}215.10^{-2}$

Remarques concernant l'écart entre R_e et R_t

La théorie mathématique ne tenant pas compte de l'influence des bords ni des mouvements des couches autres que la rotation d'ensemble, le terme [P+Q] théorique est certainement inférieur à sa valeur réelle et il est assez logique d'obtenir $R_e < R_t$.

Nous avons recherché dans les nombreux travaux de MM Van ITTERBECK et WH KEESON [4] s'ils obtenaient une concordance plus étroite entre les constantes théoriques et expérimentales. D'après leurs publications de 1938 et 1940

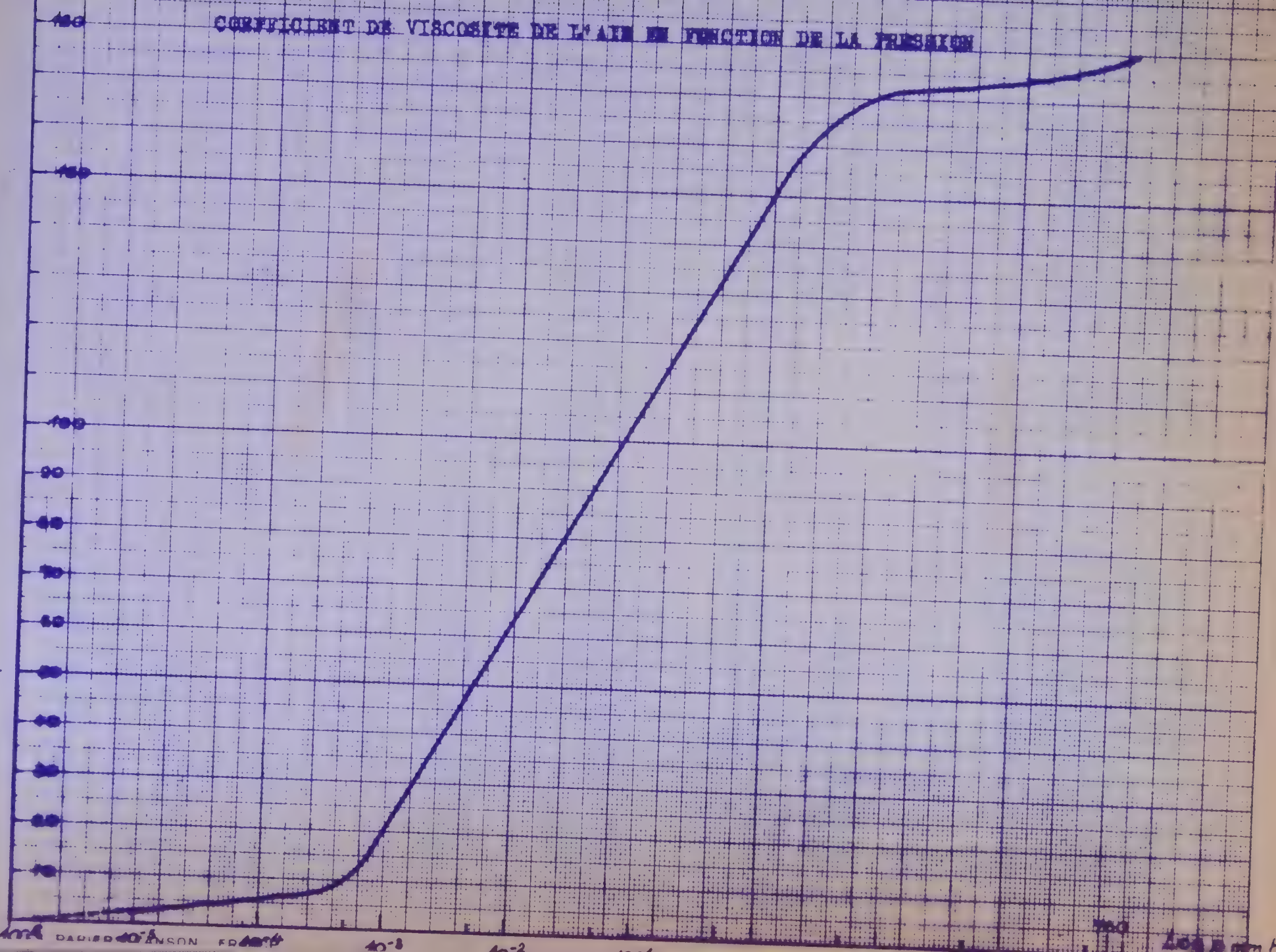
$$1{,}62 \leqslant \frac{R_e}{R_t} \leqslant 4$$

Il ne faut donc pas s'attendre à obtenir une valeur très exacte du terme d'amortissement dû à l'air dans le calcul préliminaire d'un équipement semblable. Le résultat obtenu est inférieur à la valeur réelle et peut être en première approximation multiplié par un facteur de l'ordre de 2.

Valeurs de η en fonction de la pression (fig.2)

Elles sont déterminées avec R_e

P en mm de Hg	760	300	100	30	5	1	5.10^{-1}	10^{-1}	5.10^{-2}
$\eta \times 10^6$ poises	180	176	175	172	170	150	136	106	92


COEFFICIENT DE VISCOSITE DE L'AIR EN FONCTION DE LA PRESSION

P.mm Hg	10^{-2}	5.10^{-3}	10^{-3}	5.10^{-4}	10^{-4}	$7,5.10^{-5}$	10^{-5}	10^{-6}
$x.10^{6}$	68	50	20	9,7	6	5,5	3	0

On remarque que la décroissance est très faible à partir de 10^{-4}mm. On a donc une bonne approximation de δ_o à 10^{-6}, mais l'erreur absolue sur la viscosité à basse pression peut être très importante.

Il n'en reste pas moins vrai que la variation de η avec la pression garde l'allure générale de la courbe obtenue.

Erreur relative { quelques % entre 760 et 10^{-3} mm
jusqu'à 50% entre 5.10^{-4} et 10^{-5}

Conclusion.

On remarque trois zones sur la courbe de variation de la viscosité avec la pression :

- de 760 à quelques millimètres de mercure,

η est sensiblement indépendant de la pression, conformément à la théorie cinétique. Sa variation est linéaire en fonction de p et de l'ordre de 5/100.

- de quelques mm à 5.10^{-4}

libre parcours moyen compris entre 7.10^{-3} et 35 cm.

Les chocs intermoléculaires deviennent moins nombreux que les chocs des molécules contre les parois ; l'on assiste à une modification des propriétés du gaz, et il est plus correct de parler d'un "coefficient de viscosité apparent". Sa variation est importante et linéaire en fonction de log p.

- de 5.10^{-4} à 10^{-6} mm

Dans ce domaine, la viscosité a presque complétement disparu. La pente est maintenant très faible et l'on ne diminue pratiquement plus le coefficient de viscosité en descendant à des pressions inférieures à 10^{-4}mm de Hg.

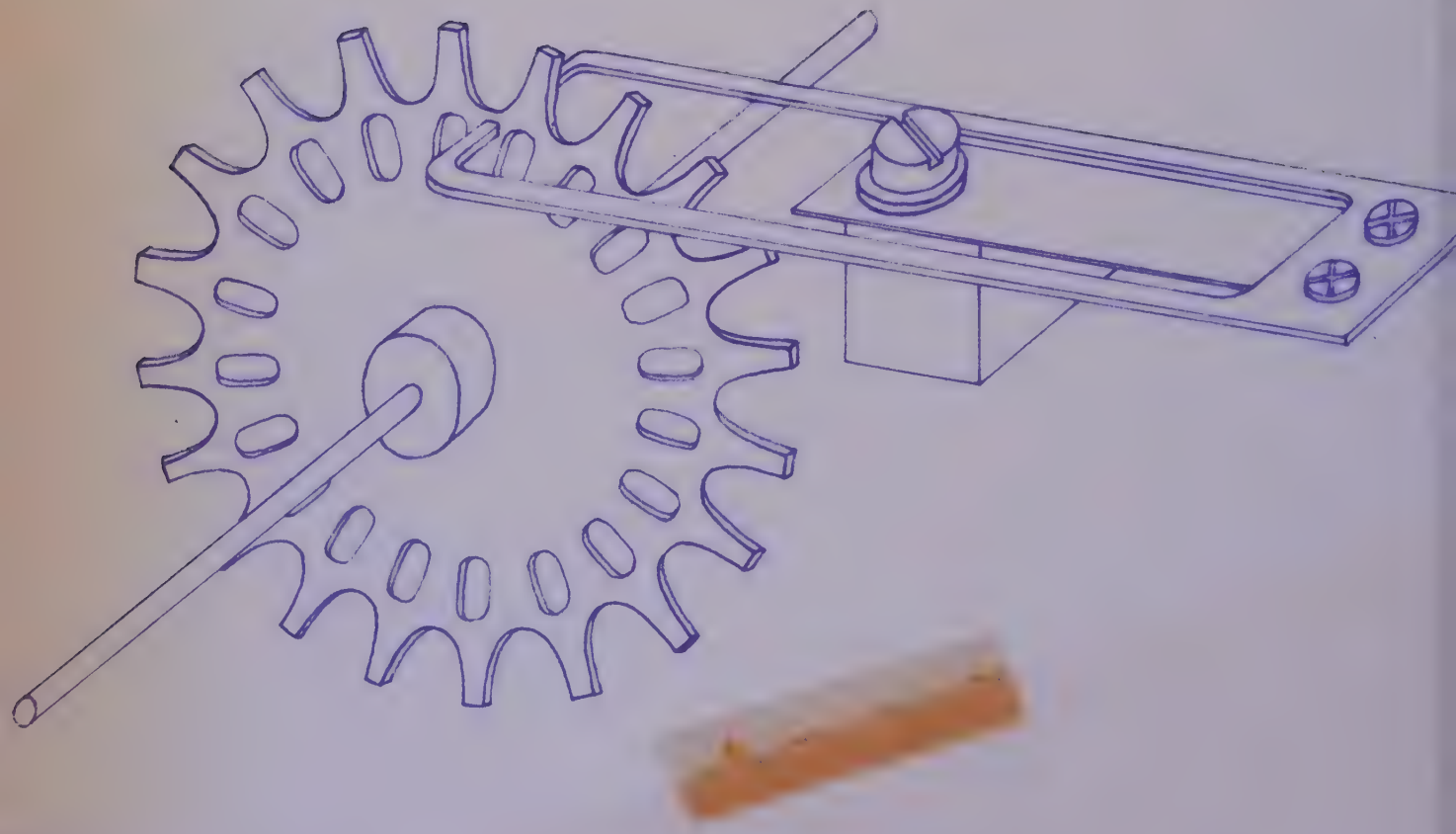
BIBLIOGRAPHIE

[1] G.G.STOKES - Cambridge Phil. Trans. 9, p8, 1856

O.E.MEYER - Pogg. Ann. 125, 177, 1865
ou Mémoires relatifs à la Physique tome V - Mémoire sur le pendule p277. Lib. Gauthier-Villars 1891

[2] H.BOUASSE - Hydrodynamique . Lib. Delagrave Paris 1928
M.Claude ATTINGER - Influence du fluide entraîné sur la période d'un pendule de torsion. Bull. Soc. Suisse de Chronométrie Vol II 1947
M.Pierre MESNAGE - Amortissement du pendule par l'air - Annales françaises de Chronométrie 1956
On trouvera une bibliographie assez complète des travaux anciens dans
[3] M.FORTIER - Thèse Sc. Phys. Paris 1937. Contribution à l'étude de la viscosité de l'air et des gaz.

[4] W.H.KEESON "Helium" Lib. Elsevier, Amsterdam 1942.(Donne de nombreuses références concernant les travaux de Van ITTERBEEK)



CHAPITRE 4

ECHAPPEMENT MAGNETIQUE

Il s'agit d'un régulateur de précision appliqué à la mesure du temps sur réveils, montres etc... Inventé et mis au point par la Sté HORSTMANN CLIFFORD MAGNETICS à Bath (Angleterre), son emploi est encore actuellement assez restreint.

Principe.

(Brevets 1, 2 et 3)(*)

Une roue taillée dans un matériau à haute perméabilité et à faible pouvoir coercitif (mumétal, supermalloy etc...) possède un profil sinusoïdal (fig.1)

Un aimant permanent monté à l'extrémité d'une lame vibrante présente un entrefer dans lequel passe la roue.

Sur la roue est appliqué un couple moteur. Dans certaines conditions particulières, il est possible d'exciter les vibrations de l'ensemble lame-aimant par une rotation uniforme de la roue.

L'aimant tend à occuper une position telle que la réluctance de son circuit magnétique extérieur soit minimum.

Si la roue tourne, il a tendance à suivre son profil et se met à vibrer.

Si la fréquence de passage d'une arche complète est voisine de la fréquence propre de vibration de la lame, on peut avoir synchronisation entre les deux organes.

Dans ces conditions :

- la lame vibrante est entretenue par la roue.
- la vitesse de rotation de la roue d'échappement est imposée par la lame.

On retrouve un peu le principe du régulateur de vitesse de BOUASSE et SARDA [1].

Si on solidarise l'aimant de la roue (celui-ci passant dans une rainure par exemple) pour un couple moteur C croissant, on observe à peu près la même variation de fréquence f.

En libérant le système,

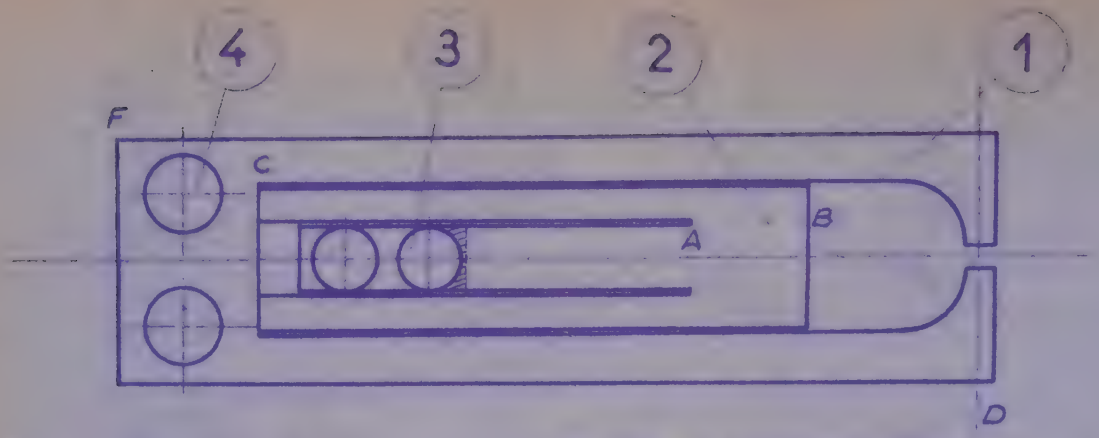
si $C_1 < C < C_2$ synchronisation possible et f sensiblement indépendant de C.

si $C > C_2$ décrochage et pas de synchronisation.

si $C < C_1$ synchronisation impossible (seuil).

(*) Voir bibliographie à la fin du présent exposé

FIG.2 A



1 Aimant
2 Lame vibrante
3 Vis d'encastrement
4 Rivet de fixation 1 sur 2

FIG.2 B

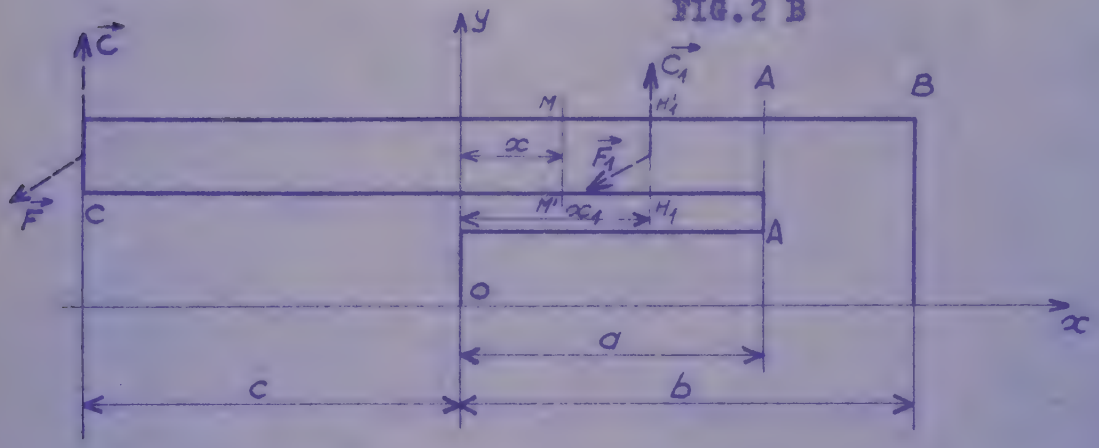
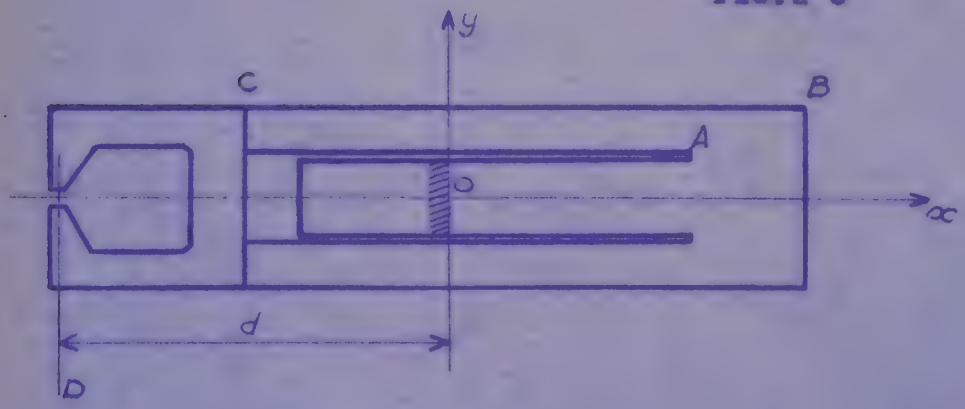


FIG.2 C



Etude de l'ensemble.

Elle porte sur 3 chapitres :

I - Principe de calcul de la fréquence fondamentale de la lame.

II - Théorie élémentaire du fonctionnement de l'échappement magnétique

III - Expériences

I - LAME VIBRANTE

On trouvera fig 2A le profil de découpe des lames utilisées actuellement.

Les effets perturbateurs dûs aux chocs sont d'autant plus faibles que la fréquence fondamentale est grande.

D'autre part, ces effets peuvent être atténués en plaçant le centre de gravité de l'ensemble oscillant sur un axe passant par le partie encastrée de la lame (ce qui explique la forme compliquée de la lame). Cette disposition permet également un gain de place appréciable dans un garde-temps.

La fréquence propre de la lame est calculée par la méthode de Lord RAYLEIGH.

Il est nécessaire pour cela de connaître la forme prise par la lame pendant la déformation. Une observation au stroboscope en donne une idée sommaire.

Un film de la lame en mouvement fournit de bien meilleurs résultats; celui-ci a été réalisé avec une caméra rapide donnant 3000 images/sec. (matériel LIP). La lame vibrant à 100 Hz, nous avons ainsi pour une période une trentaine d'images, ce qui est très suffisant.

FREQUENCE PROPRE DE LA LAME

On se propose de chercher l'expression de la fréquence de la lame en fonction de ses éléments géométriques.

La méthode approchée utilisée est celle de Lord RAYLEIGH[2]

On admet donc que les déformées statique et dynamique sont confondues. D'autre part, l'épaisseur de la lame est petite vis-à-vis de sa longueur, ce qui justifie l'approximation faite en négligeant les énergies de déformation autres que celle de flexion et l'inertie de rotation des divers éléments.

Le mouvement d'une lame de ce type dépend ainsi d'un seul paramètre. On exprime les énergies cinétiques et de déformation et le théorème des forces vives donne l'expression du fondamental de l'ensemble.

Lame vibrante (fig.2B)

L'ensemble déformable est situé dans le plan horizontal xOy. Les forces de pesanteur n'interviennent donc pas.

A l'extrémité C de la lame, on applique une force $\vec{F}$ (0, 0, F) et un couple $\vec{C}$ (0, C, 0).

Nous ne considérons qu'une demi-lame, celle-ci étant symétrique par rapport au plan xOz.

Déplacement d'un point quelconque H de la partie CA.

Nous opérons au moyen de l'énergie de déformation, c'est-à-dire par le théorème de CASTIGLIANO avec efforts fictifs.

Dans la section HH' d'abscisse x_1 on applique une force $\vec{F}_1$ (0,0, F_1) et un couple $\vec{C}_1$(0, C_1, 0) fictifs.

Moment fléchissant dans la branche CA.

pour $-c < x < x_1$ $\quad \vec{\mathfrak{M}}f_M = \vec{MC} \wedge \vec{F} + \vec{C}$ soit $\vec{\mathfrak{M}}f_M(0,\ F(c+x) + C,\ 0)$

pour $x_1 < x < a$ $\quad \vec{\mathfrak{M}}f_M = \vec{MC} \wedge \vec{F} + \vec{C} + \vec{C_1} + \vec{MH} \wedge \vec{F_1}$

soit $\vec{\mathfrak{M}}f_M(0,\ F(c+x) + F_1(x-x_1) + C + C_1,\ 0)$

En particulier, dans la section AA', pour x = a, la réduction donne une force $\vec{F'}(0,\ 0,\ F+F_1)$

et un couple $\vec{C'}(0,\ F(c+a) + C + C_1 + F_1(a-x_1),\ 0)$

Dans le talon, ou partie AB, le moment fléchissant, donc l'énergie de déformation sont nuls.

Moment fléchissant dans la branche OA.

En M situé sur OA à x de O,

$$\vec{\mathfrak{M}}f_M = \vec{C'} + \vec{MA} \wedge (\vec{F}+\vec{F_1}) \text{ soit } (0,\ F(x+c) + F_1(x-x_1) + C + C_1,\ 0)$$

Energie de déformation totale de la lame.

$W = W_1 + W_2$, W_1 et W_2 correspondant respectivement aux parties CA et OA.

$$W_1 = \frac{1}{2J_1}\int_{-c}^{x_1}\left[F(c+x)+C\right]^2 dx + \frac{1}{2J_1}\int_{x_1}^{a}\left[F(c+x)+C+C_1+F_1(x-x_1)\right]^2 dx$$

avec $J_1 = EI_1$

E module d'Young du matériau

I_1 moment d'inertie à la flexion de la section droite de la branche CA.

$$\text{et } W_1 = \frac{1}{2J_1}\Big[C^2(x_1+c) + FC(x_1+c)^2 + \frac{F^2}{3}(a+c)^3 + \frac{F_1^2}{3}(a-c)^3 +$$

$$+ 2FF_1\left(\frac{a^2c}{2} - cx_1a + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2x_1}{2} + \frac{cx_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{6}\right) +$$

$$+ 2F(C+C_1)\left(ac+\frac{a^2}{2} - x_1c - \frac{x_1^2}{2}\right) + F_1(C+C_1)(a-x_1)^2 + (C+C_1)^2(a-x_1)\Big]$$

$$W_2 = \frac{1}{2J_2}\int_0^a \left[F(c+x) + C + C_1 + F_1(x-x_1)\right]^2 dx$$

avec I_2 moment d'inertie à la flexion de la section droite de OA.

$$W_2 = \frac{1}{2J_2}\left[F^2(c^2a + \frac{a^3}{3} + ca^2) + a(C^2+C_1^2) + F_1^2(\frac{a^3}{3} + ax_1^2 - a^2x_1) + 2F(C+C_1)(ac+\frac{a^2}{2})\right.$$

$$\left. + 2FF_1(\frac{a^2c}{2} - cx_1a + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2x_1}{2}) + 2CC_1a + 2F_1(C+C_1)(\frac{a^2}{2} - ax_1)\right]$$

Déplacement d'un point quelconque de CA situé à x_1 de O.

$$w = \left(\frac{\partial W}{\partial F_1}\right)_{C_1=F_1=0} = \frac{1}{2J_1}\left[2F(\frac{a^2c}{2} - cx_1a + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2x_1}{2} + \frac{cx_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{6}) + C(a-x_1)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2J_2}\left[\frac{a^2c}{2} - cx_1a + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2x_1}{2})2F + 2C(\frac{a^2}{2} - ax_1)\right] \qquad (1)$$

Rotation d'une section HH' de CA.

$$\beta = \left(\frac{\partial W}{\partial C_1}\right)_{C_1=F_1=0} = \frac{1}{J_1}\left[F(ac+\frac{a^2}{2} - x_1c - \frac{x_1^2}{2}) + C(a-x_1)\right] + \frac{1}{J_2}\left[F(ac+\frac{a^2}{2}) + Ca\right] \qquad (2)$$

Cas particuliers

$\overrightarrow{C} = 0$ et pas de branche OA, c'est-à-dire encastrement en A pour la branche CA.

$$w = \frac{F}{J_1}(\frac{a^2c}{2} - cx_1a + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2x_1}{2} + \frac{cx_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{6})$$

pour $x_1 = -c$ $\qquad w = \frac{F}{3J_1}(a+c)^3$ résultat classique de la flexion des poutres simples.

$\overrightarrow{C} = 0$ et $J_1 = J_2 = J$

$$w = \frac{F}{J}\left[a^2c - 2acx_1 + \frac{2a^3}{3} - a^2x_1 + \frac{cx_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{6}\right]$$

pour $x_1 = -c$ $\qquad w = \frac{F}{J}\left[\frac{2}{3}(a+c)^3 - \frac{c^3}{3}\right]$

Déplacement d'un point quelconque H de la partie OA.

On utilise point par point la même méthode que précédemment. On applique maintenant une force $\overrightarrow{F_1}$ et un couple $\overrightarrow{C_1}$ fictifs dans le plan $H_1H'_1$ à x_1 de O et sur OA.

Moment fléchissant dans la branche OA.

pour $x_1 < x < a$ $\quad \overrightarrow{\mathfrak{M}f}_M = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F} + \overrightarrow{\mathfrak{M}f}_A$ soit $(0,\ F(x+c) + C,\ 0)$

$0 < x < x_1$ $\quad \overrightarrow{\mathfrak{M}f}_M = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F} + \overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{\mathfrak{M}f}_A + \overrightarrow{C_1}$

soit $\left(0,\ F(x+c) + C + C_1 + F_1(x-x_1),\ 0\right)$

Energie de déformation W.

$$W_2 = \frac{1}{2J_2}\left[\int_0^{x_1}\left[F(c+x) + C + C_1 + F_1(x-x_1)\right]^2 dx + \int_{x_1}^{a}\left[F(c+x) + C\right]^2 dx\right.$$

$$W_1 = \frac{1}{2J_1}\int_{-c}^{a}\left[F(c+x) + C\right]^2 dx$$

Après intégration :

$$W_2 = \frac{1}{2J_2}\left[\frac{F_1^2 x_1^3}{3} + F^2\left(\frac{a^3}{3} + ac^2 + a^2c\right) + x_1\left(C_1^2 + 2CC_1\right) + 2FC_1\left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 c\right)\right.$$
$$\left. + ac^2 + 2FC\left(\frac{a^2}{2} + ac\right) - F_1(C+C_1)x_1^2 - FF_1\left(\frac{x_1^3}{3} + x_1^2 c\right)\right]$$

$$W_1 = \frac{1}{2J_1}\left[F^2\left(ac^2 + \frac{a^3}{3} + ca^2\right) + aC^2 + 2FC\left(ac + \frac{a^2}{2}\right) + \frac{F^2c^3}{3} + C^2c + FCc^2\right]$$

Déplacement d'un point quelconque H_1 de OA d'abscisse x_1.

$$w = \left(\frac{\partial W}{\partial F_1}\right)_{F_1=C_1=0} = \frac{1}{2J_2}\left[-Cx_1^2 - F\left(\frac{x_1^3}{3} + x_1^2 c\right)\right] \qquad (3)$$

Rotation d'une section $H_1H'_1$ de OA.

$$\beta = \left(\frac{\partial W}{\partial C_1}\right)_{C_1=F_1=0} = \frac{1}{J_2}\left[F\left(\frac{x_1^2}{2} + cx_1\right) + Cx_1\right] \qquad (4)$$

nergie de déformation totale de la lame.

Elle est obtenue à partir de l'un ou l'autre des résultats précédents et pour : $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{C_1} = 0$ soit :

$$W_{déf} = \frac{1}{2J_1}\left[\frac{F^2}{3}(a+c)^3 + FC(a+c)^2 + C^2(a+c)\right] + \frac{1}{2J_2}\left[F^2\left(\frac{a^3}{3} + ac^2 + a^2c\right) + \right.$$
$$\left. + FC(a^2+2ac) + aC^2\right] \qquad (5)$$

éplacement de l'extrémité D.

Déplacement en C : d'après (1) :

$$w_c = \frac{1}{2J_1}\left[\frac{2F}{3}(a+c)^3+C(a+c)^2\right]+\frac{1}{2J_2}\left[2F\left(\frac{a^3}{3}+a^2c+ac^2\right)+C(a^2+2ac)\right]$$

On pose : $J_2 = \frac{J_1}{k}$

Relions maintenant $\vec{C}$ et $\vec{F}$.

Dans le cas qui nous intéresse, l'ensemble vibrant est plus complexe. Il se prolonge soit par un aimant long et rigide en U, dirigé vers Ox positif, soit par une masse magnétique trapue localisée au voisinage de C, selon les dispositions des figures 2A et 2C.

Soit d la distance OD. $d>0$ dans le 1er cas,
$d<0$ dans le 2ème cas.
Ces éléments seront toujours considérés comme étant indéformables.

Dans le plan D est appliquée $\vec{F}(0, 0, F)$ dûe au couplage magnétique.

Dans le 1er cas : $\vec{m}f_c = \vec{CD}\wedge\vec{F}$ soit $\vec{m}f_c(0, -F(d+c),0)$

avec $d+c = e$, on a donc : $C = -Fe$

et $w_c = \frac{F}{2J_1}\left[\frac{2}{3}(a+c)^3+2k\left(\frac{a^3}{3}+a^2c+ac^2\right) -e(a+c)^2-ke(a^2+2ac)\right]$

éplacement en D.

$$\vec{DD'} = \vec{CC'} + \vec{DC}\wedge\vec{\Omega}_c \quad \text{et } \vec{DD'}:(0, 0, w_c - \beta_c e)$$

soit $w_D = \frac{F}{J_1}\left[\frac{1}{3}(a+c)^3+k\left(\frac{a^3}{3}+a^2c+ac^2\right)-e(a+c)^2-ke(a^2+2ac)+e^2(a+c)+kc^2a\right]$

$$w_D = \frac{F}{J_1}\ell^3 = z \qquad (6)$$

avec $\ell^3 = \left[\frac{1}{3}(a+c)^3 + k\left(\frac{a^3}{3}+a^2c+ac^2\right) - \cdots\cdots\right]$ (7)

nergie de déformation.

D'après (5) et avec les nouvelles notations :

$$W_{total} = \frac{F^2\ell^3}{2J_1} = \frac{z^2J_1}{2\ell^3} \qquad (8)$$

placements.

Sur AC :

$$w = \frac{z}{\ell^3}\left[\frac{a^2c}{2} - cx_1a + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2x_1}{2} + \frac{cx_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{6} + k\left(\frac{a^2c}{2} - cx_1a + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2x_1}{2}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{e}{2}(a-x_1)^2 - ke\left(\frac{a^2}{2} - ax_1\right)\right] = \frac{z}{\ell^3} A \qquad (9)$$

Sur OA :

$$w = \frac{kz}{2\ell^3}\left[ex_1^2 - \frac{x_1^3}{3} - x_1^2c\right] = \frac{z}{\ell^3} B \qquad (10)$$

rce vive de la lame vibrante.

Si m est la masse par unité de longueur, la force vive d'un élément dx_1 est :

$$2\,dT = m\,w'^2 dx_1$$

Pour la partie AC :

$$w'^2 = \frac{z'^2}{\ell^6} A^2$$

$$2\,dT_1 = \frac{m_1 z'^2}{\ell^6} A^2 dx_1$$

$$\text{et } 2T_1 = \int_{-c}^{a} 2dT_1 = \frac{m_1 z'^2}{\ell^6} A_1 \qquad (11)$$

Pour la partie OA, on a de même : $w'^2 = \frac{z'^2}{\ell^6} B^2$

$$\text{et } 2T_2 = \int_{o}^{a} 2dT_2 = \frac{m_2 z'^2}{\ell^6} B_1 \qquad (12)$$

Les intégrations sont élémentaires, mais les calculs très longs. On trouve pour A_1 :

$$A_1 = \frac{11}{420} a^7 + \frac{11}{60} a^6c + \frac{11}{20} a^5c^2 + \frac{11}{12} a^4c^3 + \frac{11}{12} a^3c^4 + \frac{11}{20} a^2c^5 + \frac{11}{60} ac^6$$

$$+ \frac{11}{420} c^7 + k^2\left[\frac{a^7}{36} + \frac{7}{36} a^6c^2 + \frac{11}{12} a^4c^3 + \frac{5}{6} a^3c^4 + \frac{a^2c^5}{3} + \frac{7}{12} a^5c^2\right]$$

$$+ \frac{e^2}{4}\left[\frac{a^5}{5} + a^4c + 2a^3c^2 + 2a^2c^3 + ac^4 + \frac{c^5}{5}\right] + k^2e^2\left[\frac{a^5}{12} + \frac{a^4c}{4} + \frac{a^3c^2}{2} + \frac{a^2c^3}{3}\right]$$

$$+ 2k\left[\frac{a^7}{40} + \frac{21}{120} a^6c + \frac{13}{24} a^5c^2 + \frac{11}{12} a^4c^3 + \frac{7}{8} a^3c^4 + \frac{53}{120} a^2c^5 + \frac{11}{120} ac^6\right]$$

$$-e\left[\frac{13}{180}a^6 + \frac{13}{30}a^5c + \frac{13}{12}a^4c^2 + \frac{13}{9}a^3c^3 + \frac{13}{12}a^2c^4 + \frac{13}{30}ac^5 + \frac{13}{180}c^6\right]$$

$$-ke\left[\frac{23}{180}a^6 + \frac{5}{6}a^5c + \frac{13}{6}a^4c^2 + \frac{25}{9}a^3c^3 + \frac{21}{12}a^2c^4 + \frac{13}{30}ac^5\right]$$

$$-2k^2e\left[\frac{a^6}{24} + \frac{a^5c}{4} + \frac{13}{24}a^4c^2 + \frac{2}{3}a^3c^3 + \frac{a^2c^4}{3}\right]$$

$$+ ke^2\left[\frac{a^5}{12} + \frac{a^4c}{2} + a^3c^2 + \frac{5a^2c^3}{6} + \frac{ac^4}{4}\right]$$

$$\text{et } B_1 = \frac{k^2}{4}\left[\frac{e^2a^5}{5} + \frac{a^7}{63} + \frac{a^5c^2}{5} - \frac{ea^6}{9} - \frac{2ea^5c}{5} + \frac{a^6c}{9}\right]$$

Force vive du talon AB

éplacement d'un point quelconque de AB.

Déplacement en A :

$$w_A = \frac{1}{2J_2}\left[-Ca^2 - F\left(\frac{a^3}{3} + a^2c\right)\right] = \frac{Fk}{2J_1}\left[ea^2 - \left(\frac{a^3}{3} + a^2c\right)\right] = \frac{z}{2\ell^3}k\left[F_1\right]$$

Rotation élémentaire en A :

$$\beta_A = \frac{1}{2J_2}\left[2F\left(\frac{a^2}{2} + ac\right) + 2aC\right] = \frac{Fk}{2J_1}\left[a^2 + 2ac - 2ae\right] = \frac{z}{2\ell^3}k\,G_1$$

Le talon AB est indéformable; le déplacement d'un point quelconque M, ΔM est donc :

$$\overrightarrow{\Delta M} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_A = \frac{z}{2\ell^3}k\left[F_1 + (a-x)G_1\right] \qquad (13$$

soit : $\Delta M = \frac{zk}{\ell^3}\left[\frac{a^3}{3} + \frac{a^2c}{2} - \frac{a^2e}{2} - x_1\left(\frac{a^2}{2} + ac - ae\right)\right]$

nergie cinétique.

m_3 masse par unité de longueur du talon AB.

$$2dT_3 = m_3\left(\frac{\Delta M}{dt}\right)^2$$

$$2T_3 = \frac{m_3 z'^2 k^2}{4\ell^6}\int_a^b\left[F_1 + (a-x)G_1\right]^2 dx$$

$$2T_3 = m_3 \frac{z'^2 k^2}{4\ell^6} (b-a) \left[F_1^2 - F_1 G_1 (b-a) + \frac{G_1^2}{3} (b-a)^2 \right]$$

Force vive de l'aimant

Ce dernier est représenté fig 2D.

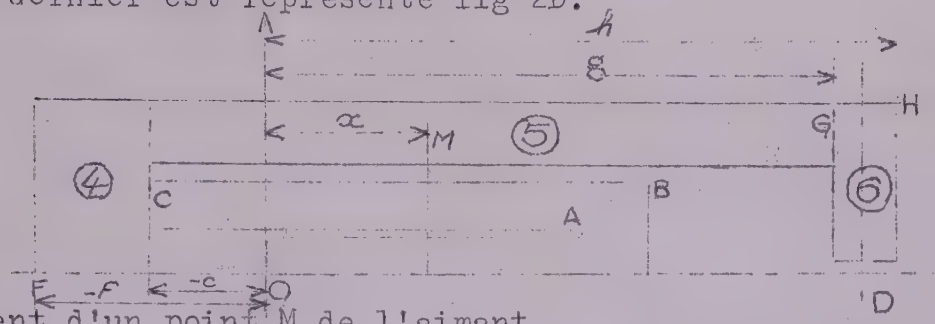


fig. 2D

Déplacement d'un point M de l'aimant .

$$\overrightarrow{\Delta M} = \overrightarrow{\Delta C} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{\Omega}_c$$

d'après (1) et (2)

$$w_M = w_c - (c+x)\beta_c$$

w_c est déjà connu.

$$\beta_c = \frac{F}{2J_1}\left[(a+c)^2 - k(a^2+2ac) - 2e(a+c) - 2kea\right] = \frac{z}{2\ell^3} E_1$$

On pose également $w_c = \frac{z}{2\ell^3} D_1$

Les développements qui suivent sont exprimés en fonction de D_1 et E_1. Ces deux termes seront calculés dans une application pratique afin d'obtenir ℓ . Ils facilitent l'écriture car, de toute façon, aucun regroupement n'est possible.

$$\Delta M = \frac{z}{2\ell^3} \left[D_1 - (c+x) E_1 \right] \qquad (15)$$

L'aimant est partagé en trois zones à section constante (fig 2D) où les masses par unité de longueur sont respectivement m_4, m_5 et m_6.

$$2T' = 2T_4 + 2T_5 + 2T_6$$

avec :

$$2T' = \frac{z'^2}{4\ell^6}\left[\int_{-f}^{-c} m_4 \left[D_1 - (c+x)E_1\right]^2 dx + \int_{-c}^{g} m_5 \left[D_1 - (c+x)E_1\right]^2 dx + \right.$$
$$\left. + \int_{g}^{h} m_6 \left[D_1 - (c+x)E_1\right]^2 dx. \right]$$

d'où :

$$2T' = \frac{z'^2}{4\ell^6}\Big[m_4(f-c)\Big[D_1^2 + \frac{E_1^2}{3}(f-c)^2 + D_1E_1(f-c)\Big] +$$

$$+ m_5(c+g)\Big[D_1^2 + \frac{E_1^2}{3}(c+g)^2 - D_1E_1(c+g)\Big] +$$

$$+ m_6(h-g)\Big[D_1^2 + \frac{E_1^2}{3}\Big((c+h)^2+(c+h)(c+g)+(c+g)^2\Big) - D_1E_1(2c+g+h)\Big] \qquad (16)$$

Fréquence fondamentale des oscillations de l'ensemble

Le théorème des forces vives s'écrit :

$$2T + 2W = C^{te}$$

soit : $2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T' + 2W = C^{te}$ exprimé en fonction de z et z'

Après dérivation des deux membres par rapport au temps et division par y', on obtient :

$$y'' + \Omega_o^2 y = 0 \qquad (17)$$

Ω_o pulsation des oscillations.

CAS PARTICULIERS

1/ Lame centrale sans aimant.

La partie CD est supprimée et à l'extrémité C de la lame vibrante les forces appliquées se réduisent à $\vec{F}$ (0, 0, F)

$$\vec{C} = 0 \quad ; \quad e = 0$$

On suppose $J_1 = J_2 = J$ ou encore $m_1 = m_2 = m$

Nous reprenons les différents résultats précédents après simplifications.

Déplacements - Energie potentielle ou de déformation.

En C extrémité libre,

$$w_c = \frac{F}{J}\Big[\frac{1}{3}(a+c)^3 + \frac{a^3}{3} + a^2c + ac^2\Big] = \frac{F}{J}\ell^3 = z \qquad (7')$$

Energie de déformation : $W = \frac{F^2}{2J}\ell^3 = \frac{J}{2\ell^3}z^2$ (8')

Déplacement d'un point quelconque de CA.

$$w = \frac{z}{\ell^3}\Big[a^2c - 2acx_1 + \frac{2a^3}{3} - a^2x_1 + \frac{cx_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{6}\Big] \qquad (1')$$

Déplacement d'un point quelconque de OA.

$$w = \frac{z}{\ell^3}\left[-\frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1^2 c}{2}\right]$$

Déplacement d'un point quelconque du talon AB.

en A : $w_A = \frac{z}{\ell^3}\left[-\frac{a^3}{6} - \frac{a^2 c}{2}\right] = \frac{z}{\ell^3}\left[F'_1\right]$

$$\beta_A = \frac{z}{\ell^3}\left[\frac{a^2}{2} + ac\right] = \frac{z}{\ell^3}\left[G'_1\right]$$

soit, en M d'abscisse x sur AB :

$$\Delta M = w_A + (a-x)\beta_A = \frac{z}{\ell^3}\left[F'_1 + (a-x)G'_1\right] \qquad (13')$$

Energie cinétique de la lame.

Pour la partie AC : $2T_1 = \frac{mz'^2}{\ell^6} A'_1$ avec : (11')

$$A'_1 = \frac{131}{1260} a^7 + \frac{131}{180} a^6 c + \frac{133}{60} a^5 c^2 + \frac{11}{3} a^4 c^3 + \frac{7}{2} a^3 c^4 + \frac{53}{30} a^2 c^5 + \frac{11}{30} a c^6 + \frac{11}{420} c^7.$$

Pour la partie OA : $2T_2 = \frac{mz'^2}{\ell^6} B'_1$ (12')

avec : $B'_1 = \frac{a^7}{252} + \frac{a^6 c}{36} + \frac{a^5 c^2}{20}$

Energie cinétique du talon.

$$2T_3 = \frac{m_3 z'^2}{\ell^6}(b-a)\left[F'^2_1 - F'_1 G'_1 (b-a) + \frac{G'^2_1}{3}(b-a)^2\right]$$

ou en explicitant (sans grand intérêt) :

$$2T_3 = \frac{m_3 z'^2}{\ell^6} C_1$$

$$C_1 = -\frac{a^7}{36} + a^6\left(\frac{b}{9} - \frac{c}{12}\right) + a^5\left(-\frac{b^2}{6} + \frac{bc}{3} - \frac{c^2}{12}\right) + a^4\left(\frac{b^3}{12} - \frac{7}{12} b^2 c + \frac{bc^2}{4}\right) + a^3\left(\frac{b^3 c}{3} - \frac{b^2 c^2}{2}\right) + \frac{a^2 b^3 c^2}{3}$$

Energie cinétique totale.

$$2T = 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 = \frac{mz'^2}{\ell^6} D$$

Fréquence fondamentale de la lame.

$$2W + 2T = C^{te}$$

soit : $\frac{mz'^2}{\ell 6} D + \frac{z^2 J}{\ell^3} = C^{te}$

$$z'' + \Omega_o^2 z = 0 \qquad \text{avec } \Omega_o^2 = \frac{J\ell^3}{mD}$$

Pour une lame plate :

$J = EI = E \frac{e^3 h}{12}$; $\frac{J}{m} = \frac{E}{12} \frac{e^2}{\delta}$ δ étant la masse spécifique

et $\Omega_o^2 = \frac{E}{12} \frac{e^2}{\delta} \frac{\ell^3}{D}$

Remarques :

1/ Lame droite classique de longueur C.

Soit a = b = 0, extrémité libre en C et encastrée en A.

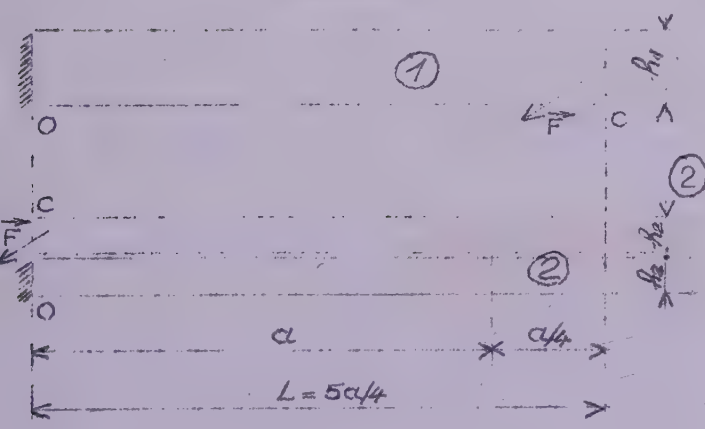
$$\frac{\ell^3}{D} = \frac{420}{33c^4} \qquad \Omega_o^2 = \frac{35}{33} \frac{E}{\delta} \frac{e^2}{c^4}$$

et $f = 0{,}1639 \sqrt{\frac{E}{\delta}} \frac{e}{c^2}$ résultat classique approché.

2/ Comparaison du type de lame étudié avec la lame simple classique.

Nous comparons les fréquences fondamentales et déplacements de l'extrémité libre. Ces lames sont constituées par le même matériau ; elles ont mêmes longueur, épaisseur et largeur totale (fig 2E)

Fig. 2E



Déplacements en C sous l'action de $\vec{F}$

① $w_{c_1} = \frac{FL^3}{3J_1}$ $J_1 = EI_1$

$I_1 = \frac{e^3 h_1}{12}$

② $w_{c_2} = \frac{2Fa^3}{3J_2} = \frac{1{,}025FL^3}{3J_2}$

$J_2 = EI_2$ $I_2 = \frac{e^3 h_2}{12}$

On a sensiblement $h_1 = 2h_2$

et $w_{c_2} \simeq 2 w_{c_1}$

Fréquences fondamentales.

① $\omega_1^2 = \frac{J_1}{m_1} \frac{420}{33L^4}$

② Energie cinétique totale :

partie AC : $2T_1 = \frac{131}{1260} \frac{m_2 z'^2}{\ell^6} a^7$

partie OA : $2T_2 = \frac{1}{252} \frac{m_2 z'^2}{\ell^6} a^7$

talon AB : $2T_3 = \frac{m_3 z'^2}{36} \left[- a^7 + 4a^6 b - 6a^5 b^2 + 3 a^4 b^3 \right]$

On pose : $\frac{b}{a} = x = \frac{5}{4}$

$2T_3 = \frac{m_3 z'^2}{36} a^7 \left[(x-1)(3x^2-3x+1) \right]$ T_3 est positif, le trinôme l'étant toujours.

Or $m_3 \simeq 2m_2$ et $2T_3 \simeq \frac{1}{36} \frac{m_2 z'^2}{\ell^6} a^7$

$$2T \simeq \frac{19}{140} \frac{m_2 z'^2}{\ell^6} a^7$$

Energie de déformation :

$$2W = \frac{J_2 z^2}{\ell^3} \text{ avec } \ell^3 = \frac{2a^3}{3}$$

d'où : $\omega_2^2 = \frac{280}{57} \frac{J_2}{m_2} \frac{1}{a^4} = \frac{280}{233} \frac{J_2}{m_2} \frac{1}{L^4}$

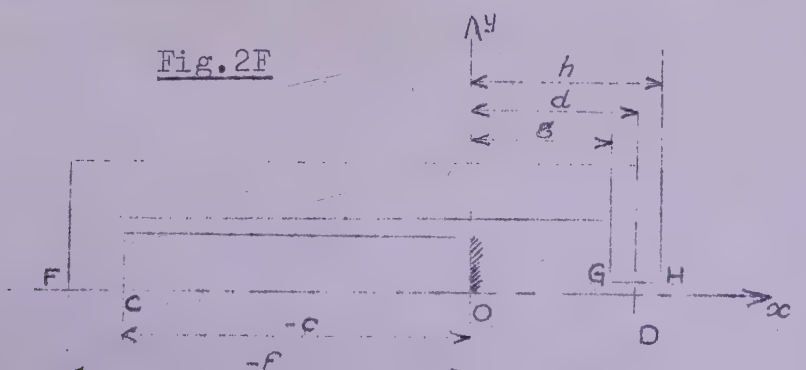
or $\frac{J_1}{m_1} = \frac{J_2}{m_2}$ $\qquad \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \simeq 0,95$

et $T_1 \simeq 0,975\ T_2$ soit $T_1 \simeq T_2$

(Une vérification expérimentale a été effectuée pour deux lames du type ① et ② ; les fréquences sont effectivement très voisines l'une de l'autre)

2/ Lame centrale simplifiée.

Fig.2F



La lame centrale déformable est constituée par l'élément OC. Sur celle-ci est fixé l'aimant permanent supposé rigide et disposé selon la figure 2F.

On se reporte aux résultats précédents.

Déplacement d'un élément de OC.

$$w = \frac{1}{2J_1}\left[F\left(\frac{x_1^3}{6} + \frac{cx_1^2}{2}\right) + Cx_1^2\right] = \frac{F}{J_1}\left[\frac{x_1^3}{6} + \frac{cx_1^2}{2} - \frac{ex_1^2}{2}\right] \qquad (1")$$

Rotation d'une section de OC.

$$\beta = \frac{F}{J_1}\left[-\frac{x_1^2}{2} - x_1 c - ex_1\right] \qquad (2")$$

Energie de déformation.

$$W = \frac{F^2}{2J_1}\left[\frac{c^3}{3} - ec^2 + e^2 c\right] = \frac{F^2 \ell^3}{2J_1} = \frac{J_1 z^2}{2\ell^3} \qquad (5")$$

en D déplacement $z = \frac{F\ell^3}{J_1}$, $\ell^3 = \frac{c^3}{3} - ec^2 + e^2 c$ (7")

Force vive de l'ensemble.

1) lame OC.

$$2T_1 = \int_{-c}^{o} \frac{m_1 z'^2}{\ell^6} A^2 dx_1 \qquad \text{avec } A = \frac{x_1^3}{6} + \frac{cx_1^2}{2} - \frac{ex_1^2}{2}$$

$$2T_1 = \frac{m_1 z'^2}{\ell^6} A_1 \quad \text{avec } A_1 = \frac{11}{420} c^7 - \frac{13}{180} ec^6 + \frac{1}{20} e^2 c^5 \qquad (11")$$

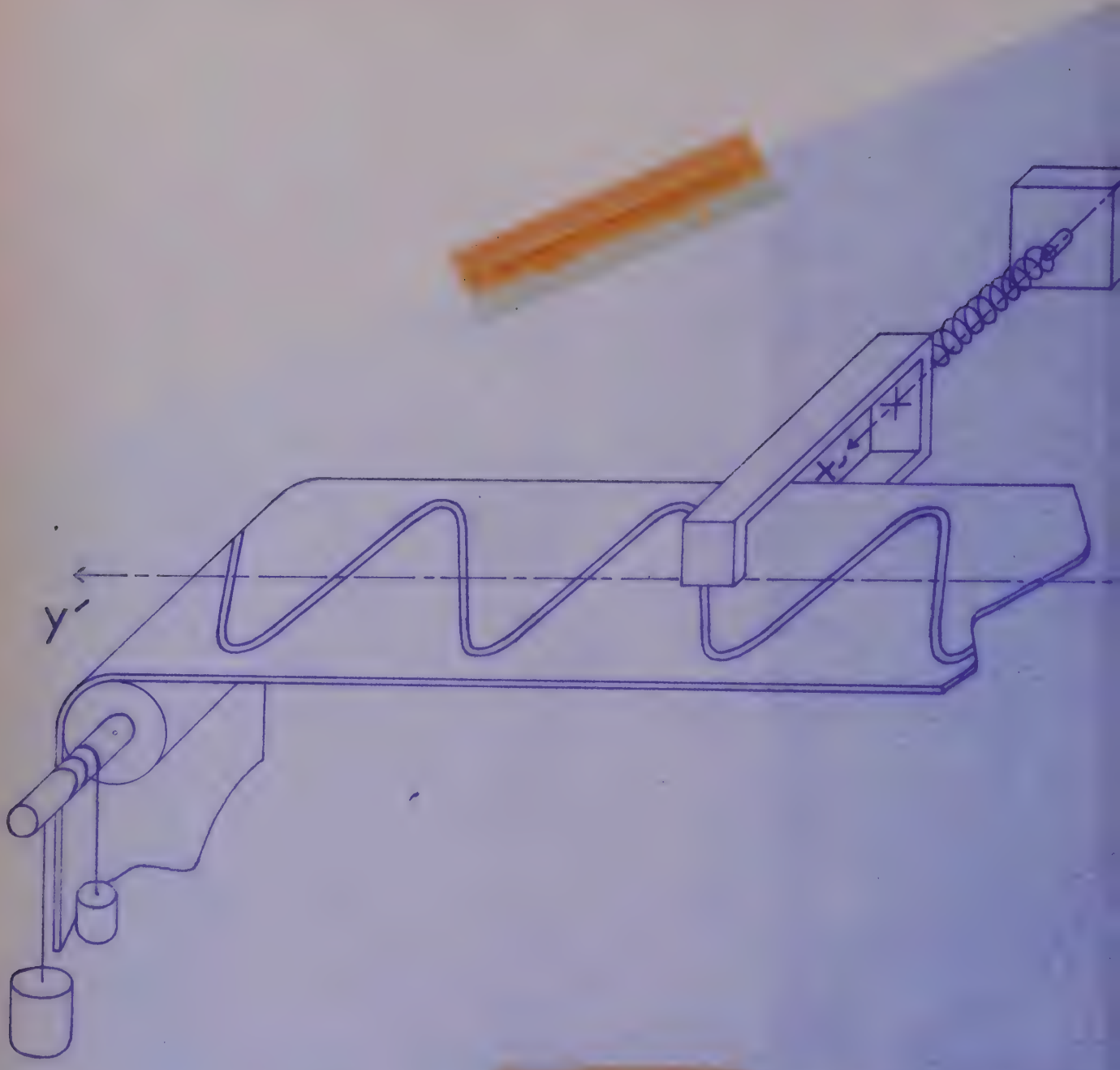
2) Aimant.

Déplacement d'un élément quelconque de l'aimant.

$$\Delta M = \frac{z}{2\ell^3}\left[D_1 - (C+x)E_1\right] \quad \text{avec } D_1 = \frac{2c^3}{3} - ec^2$$

$E_1 = c^2 - 2ec$ et $2T'$ selon (16)

soit $2(T_1+T') + 2W = C^{te}$


Y-
X-

II - THEORIE ELEMENTAIRE DE L'ECHAPPEMENT MAGNETIQUE

On envisage le montage simplifié de la fig 3A. C'est un système à deux degrés de liberté : suivant xx' pour l'aimant et yy' pour la piste magnétique sinusoïdale.

Forces dûes au couplage magnétique.

Aimant.

Soit V_M le potentiel magnétique. Il sera considéré comme constant (en fonctionnement, petites variations de la réluctance du circuit magnétique extérieur).

Energie potentielle : $$W = \frac{1}{2} V_M^2 P \qquad (1)$$

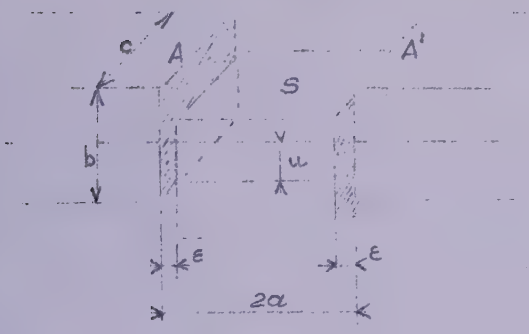
P perméance du circuit magnétique extérieur

Force : $$F = \frac{\partial W}{\partial u} = \frac{1}{2} W_M^2 \frac{\partial P}{\partial u} \qquad (2)$$

Calcul élémentaire de la réluctance (pour un champ uniforme dans l'entrefer)

Dans l'entrefer de l'aimant AA', un shunt magnétique mobile S représentant la piste ondulée (fig.3B)

Fig. 3B



$$R = \frac{1}{\mu} \frac{\ell}{S}$$

$$\frac{1}{R_{ext}} = \frac{1}{R_{1\,air}} + \frac{1}{R_{2\,noyau}} = P \text{ total}$$

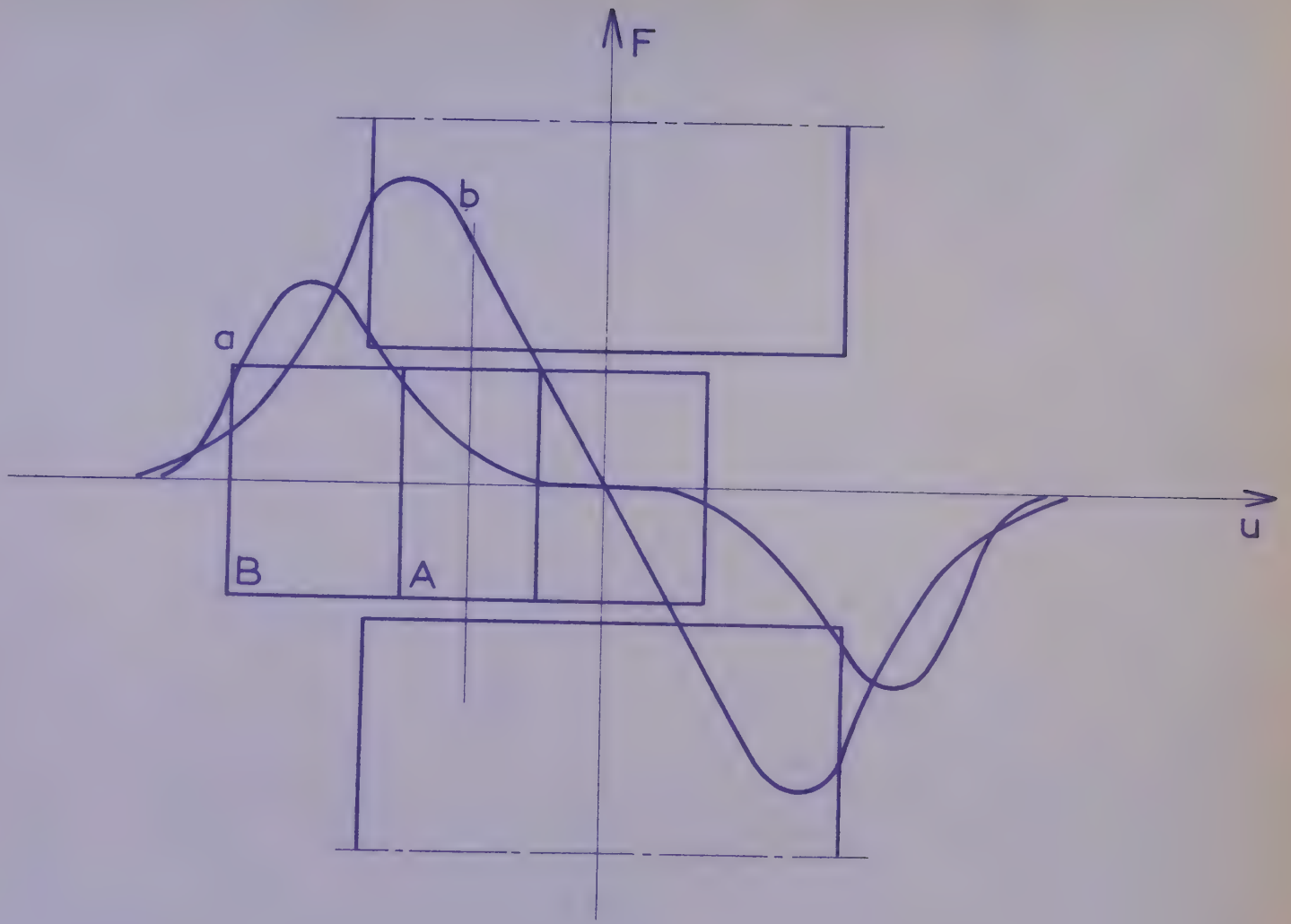
$$R_1 = \frac{1}{\mu_o} \frac{2a}{uc}$$

$$R_2 = \frac{1}{\mu_o \mu_r} \frac{2(a-\varepsilon)}{(b-u)c} + \frac{1}{\mu_o} \frac{2\varepsilon}{(b-u)c} = \frac{2}{\mu_o \mu_r (b-u)c} \left[a+\varepsilon(\mu_r-1)\right]$$

$\mu_r \gg 1$ et $\varepsilon \ll a$ $\qquad R_2 \# \frac{2(a+\varepsilon\mu_r)}{\mu_o \mu_r (b-u)c}$

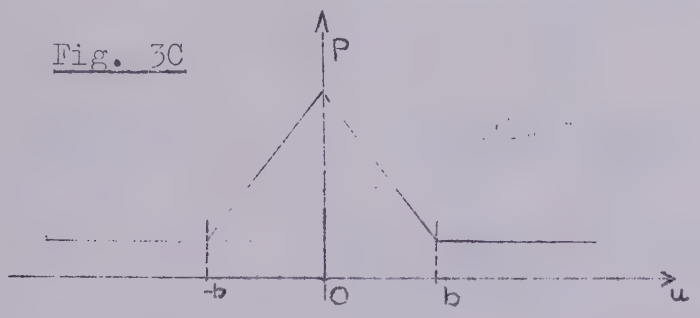
$$P = \frac{\mu_o c}{2}\left[\frac{u}{a} + \frac{\mu_r (b-u)}{a+\varepsilon\mu_r}\right] \simeq \frac{\mu_o c}{2(a+\varepsilon\mu_r)} \left[u(1-\mu_r) + b\mu_r\right] \qquad (3)$$

FIG.4



Avec quelques approximations, cette façon de procéder conduit à P = Au+B (4) (u étant pris en valeur absolue), courbe représentée sur la figure 3C.

Fig. 3C



Critique : le champ n'est pas uniforme et cette représentation trop grossière. Il n'existe pas de solution analytique simple.

Une méthode beaucoup plue valable consiste à déterminer expérimentalement la force agissant sur le shunt en fonction de sa position (fig.4) sur un modèle à grande échelle.

La zone centrale à gradient du champ nul est d'autant plus large que le shunt est court par rapport à l'entrefer.

Dans le cas qui nous intéresse, soit un shunt de longueur égale à celle de l'entrefer; la force est maximum près du bord de l'aimant et la zone centrale comporte une longue portion à variation linéaire.

Ceci conduit à représenter la perméance par une fonction du second degré, approximation correcte pour les petits déplacements et jusqu'à $u \simeq \pm b/3$.

$$\text{soit} \quad P = A_1 u^2 + B_1 \quad \text{et} \quad |F| = A_1 V_M^2 u$$

Remarques :

1) La fonction de Gauss $\Psi(u) = A\, e^{\frac{-u^2}{2}} + B$ donne un représentation approchée assez bonne de la perméance (du moins pour les conditions aux limites)

En prenant son développement en série pour u petit

$$P = B + A\left(1 - \frac{u^2}{2} + \ldots\right) \text{ forme semblable à la précédente}$$

2) Pour des masses magnétiques ponctuelles : expression des forces entre shunt et aimant (fig.3D)

A et A' sont les pôles et B le shunt magnétique.

Composante suivant uu' de la force agissant sur B.

$$F_B = \frac{2k}{AB^2} \cos\theta = \frac{2k \sin^3\psi}{x^2}$$

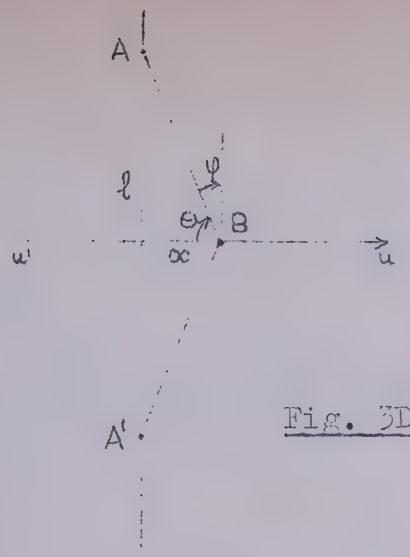


Fig. 3D

Or $\sin \varphi = \frac{x}{\ell}(1 + \frac{x^2}{\ell^2})^{-1/2}$

soit pour $x < \ell$

$$F_B = \frac{2k}{\ell^3}(x - 3/2\frac{x^3}{\ell^2} + \ldots)$$

expression ne contenant donc que des termes impairs.

Mise en équation.

A/ Aimant.

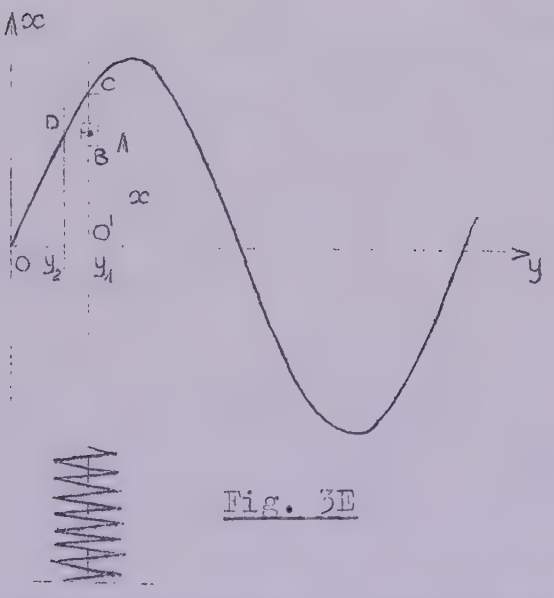


Fig. 3E

D'après le choix des repères l'équation de la piste est :

$$x = a_1 \sin y$$

Evaluons u, décalage piste-aimant : $u = \overrightarrow{CB}$

soit $u = x - a_1 \sin y_1$ (5)

(ici $u < 0$) (fig 3E)

Le mouvement de l'ensemble aimant-lame vibrante caractérisée par les paramètres mécaniques classiques m, k et f, est régi par l'équation :

$$mx'' + fx' + kx = - A_1 V_M^2 (x - a_1 \sin y) \quad (6)$$

m masse vibrante équivalente
k coefficient de raideur équivalent
f coefficient d'amortissement

B/ Piste sinusoïdale.

De la même façon que précédemment, exprimons le décalage piste-aimant. La piste est soumise à une force $\overrightarrow{F_2}$ dirigée suivant $\overrightarrow{DB}$.

$\overrightarrow{F_2}$ n'a donc aucune action sur le mouvement de l'aimant. (Là encore, nous schématisons le problème ; il est certain qu'en réalité $\overrightarrow{F_2}$ n'est pas colinéaire à DB).

$O'B = x = a_1 \sin y_2$; $y_2 = \text{arc sin } \frac{x}{a_1}$

$$\overline{BD} = y_2 - y_1 = \text{arc sin } \frac{x}{a_1} - y_1 \qquad (7)$$

soit $F_2 = A_1 V_M^2 (y_1 - \text{arc sin } \frac{x}{a_1})$

En négligeant les frottements qui ne jouent pas un rôle prépondérant avec: M masse apparente de la piste,

F_m force extérieure motrice appliquée à la piste

$$My'' = A_1 V_M^2 (y_1 - \text{arc sin } \frac{x}{a_1}) + F_M \qquad (8)$$

Résolution des équations (6) et (8).

1 - Lame vibrante.

$$mx'' + fx' + x(k + A_1 V_M^2) = A_1 V_M^2 a_1 \sin y$$

On pose $\frac{f}{m} = 2\varepsilon$ $\qquad \frac{k}{m} = \Omega_o^2$ $\qquad \frac{k + A_1 V_M^2}{m} = \omega_o^2$

$$\frac{A_1 V_M^2 a_1}{m} = a_2 \omega_o^2$$

soit $x'' + 2\varepsilon\omega_o x' + \omega_o^2 x = a_2 \omega_o^2 \sin y \qquad (9)$

Supposons l'existence d'un mouvement vibratoire permanent et soit ω la pulsation prise par la lame.

nous avons $y = \omega t$

En régime permanent synchronisé la solution de (9) est :

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{D}} \sin(\omega t + \varphi) \qquad (10)$$

avec $D = (1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2})^2 + 4\varepsilon^2 \frac{\omega^2}{\omega_o^2}$ ou en posant $v = \frac{\omega}{\omega_o}$

$$D = (1-v^2)^2 + 4\varepsilon^2 v^2$$

et φ donné par : $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-2\varepsilon v}{1-v^2}$ $\qquad \sin\varphi = \dfrac{-2\varepsilon v}{\sqrt{D}}$

- Piste sinusoïdale.

La position de la lame est définie par (10)

$$y' = \text{cte} \qquad \text{et dans (8)}$$
$$y'' = 0$$

F_m = terme constant + terme variable

Cette égalité ne peut être satisfaite. Il en résulte que le régime permanent de la piste ne peut être une translation à vitesse constante. Ce régime comportera nécessairement une vibration superposée.

Mais pour une étude élémentaire du fonctionnement, nous pouvons effectuer de nouvelles simplifications, approximations du même ordre que les précédentes.

En fonctionnement normal $\dfrac{a^2}{\sqrt{D}} \sim a_1$

et $\operatorname{arc\,sin}\dfrac{x}{a_1} \sim \operatorname{arc\,sin}\ \sin(y+\varphi)$

$$y - \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a_1} \sim -\varphi$$

soit $My'' \sim F_m - A_1 V_M{}^2 \varphi$ (11)

On peut alors avoir $y'' \sim 0$; $y' \sim \omega$, et $F_m \sim A_1 V_M{}^2 \varphi$ (12)

Le déphasage φ est toujours négatif. Il en est de même de F_m d'après le choix $x_1 = a_1 \sin y$ fait pour la piste sinusoïdale. Le déphasage croît avec la force appliquée sur la piste.

- φ est une fonction croissante de $\dfrac{\omega}{\omega_o}$ à variation très rapide au voisinage de $v = 1$.

Il est certain que φ ne peut dépasser une certaine limite au-delà de laquelle il y a décrochage.

Dans toute réalisation pratique, la piste sinusoïdale et l'entrefer présentent chacun une certaine largeur. Des déphasages voisins de $\pi/2$ sont possibles et s'observent en fonctionnement normal.

On peut faire une étude du déphasage critique correspondant au décrochage. Elle est calquée sur celle que l'on effectue dans le cas du moteur synchrone et nous renvoyons pour ce calcul aux ouvrages traitant cette question, en particulier :

Stabilité de marche des moteurs synchrones. Ordinary non linear differential equations in engineering and physical sciences de NW Mc LACHLAN - Oxford Clarendon Press.

Echappement magnétique CLIFFORD

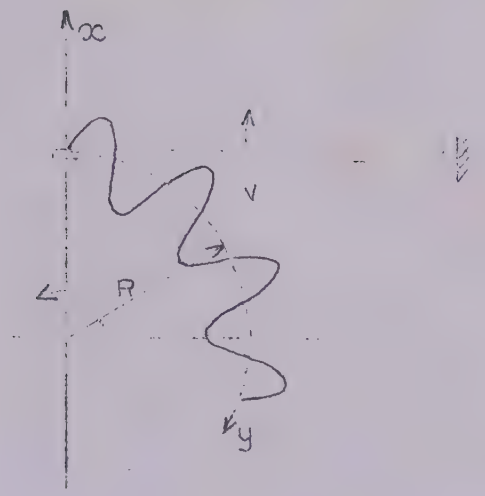


Fig.3F

La roue d'échappement effectue un tour pour n périodes de la lame vibrante (n étant le nombre de "dents") - figure 3 F.

$$r = R + a_1 \sin y$$

$$\Theta'_{roue} = \frac{\omega}{n}$$

$$y = \frac{R}{n}\,\omega t$$

Le mouvement de la lame vibrante est donné par (10)

$$x = \frac{a_2}{\sqrt{D}} \sin(\omega t + \varphi)$$

Roue d'échappement.

Couple moteur C_m appliqué à la roue.

I moment d'inertie de la roue d'échappement et du rouage ramené sur la roue d'échappement.

En négligeant les frottements :

$$I\Theta'' = C_m + A_1 V_M\,(R + a_1 \sin y)\left(y - \text{arc sin}\,\frac{x}{a_1}\right) \qquad (13)$$

Avec les mêmes hypothèses que précédemment :

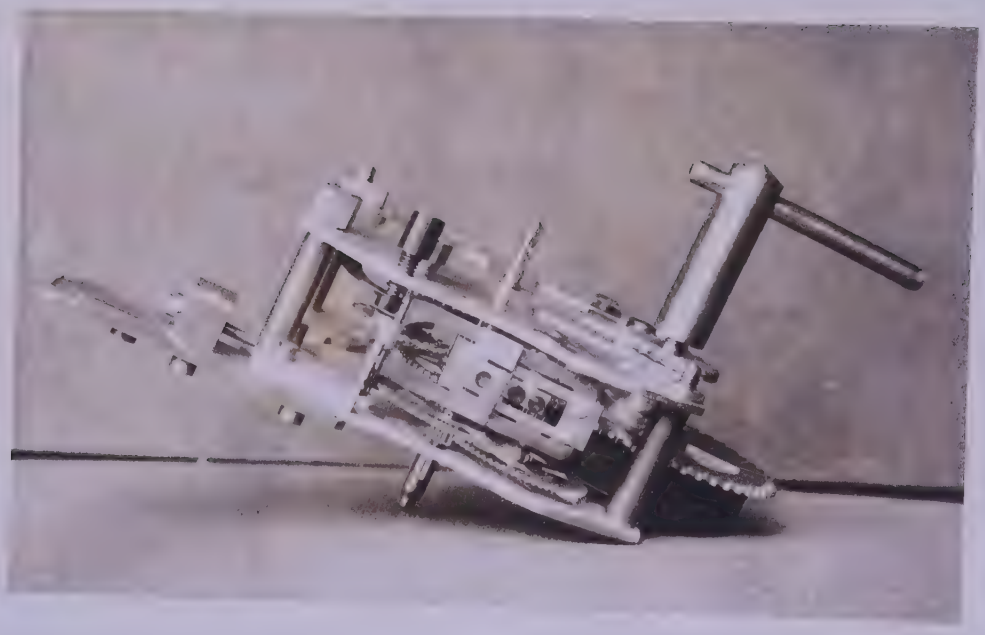
$$I\Theta'' = C_m - A_1 V_M^2\,(R + a_1 \sin R\,\Theta' t)\,\varphi$$

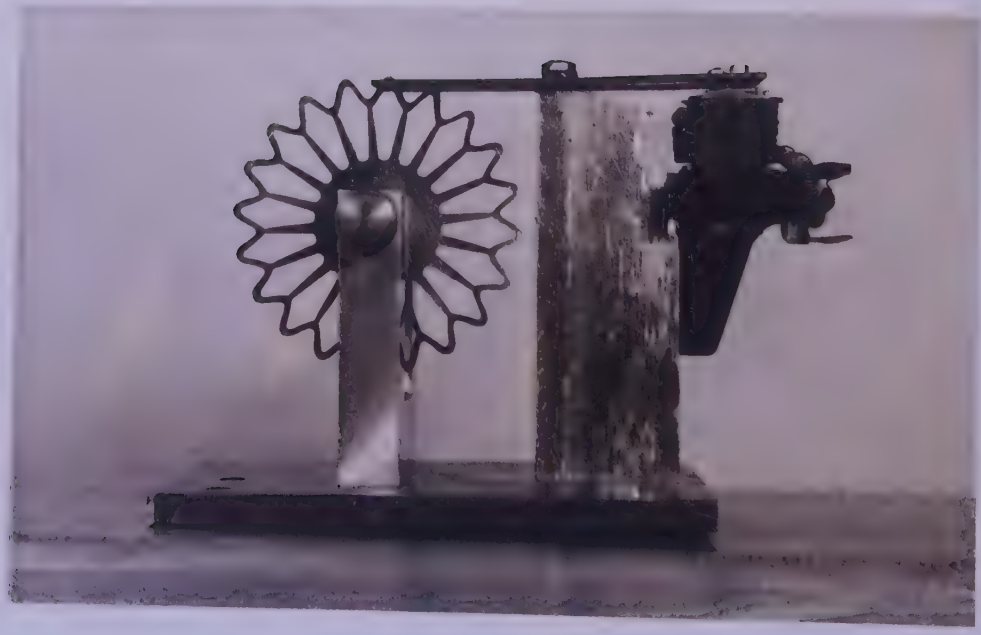
Θ'' est donc $\neq$ de 0 et le mouvement de la roue consiste en une rotation uniforme avec v ibration superposée. En considérant les termes qui varient lentement

c'est-à-dire que nous effectuons $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\ldots)\,d(\Theta' t)$

$$I\Theta'' = C_m - A_1 V_M^2\,R\,\varphi$$

Résultat et conclusion identiques aux précédents.





III - Etude expérimentale.

Les essais ont été effectués sur des réveils à échappement magnétique aimablement mis à notre disposition par la Sté JUNGHANS (cf. photos)

A - Ensemble vibrant isolé.

1/ Coefficient d'amortissement de la lame.

La lame est excitée par un choc. Un capteur électromagnétique placé au voisinage d'une extrémité de celle-ci délivre une tension proportionnelle à la vitesse, soit $\underline{x}\ \omega_o$

On enregistre par photographie sur écran d'oscilloscope la variation d'amplitude en fonction du temps.

Cinq relevés ont été effectués. On a pour la lame :

$$t = 0 \quad : \quad x = x_o$$

$$t = T \quad : \quad x = x_o\, e^{-a\omega_o T} = x_1$$

$$\frac{x_o}{x_1} = e^{a\omega_o T} = e^{2\pi a} = e^{\delta}$$

δ décrément logarithmique des oscillations.

$$\frac{x_o}{x_n} = e^{n\delta}$$

n étant le nombre d'oscillations complètes nécessaires pour passer de x_o à x_n.

$$\delta = \frac{1}{n} L_e \frac{x_o}{x_n}$$

Décrément logarithmique de la lame : En moyenne les courbes d'amortissement donnent :

$$\delta = 1{,}1.10^{-2}$$

2/ Mesure du défaut d'isochronisme.

L'amortissement est rapide. En une à deux secondes il y a extinction quasi complète des oscillations. Cette mesure est donc délicate Une méthode intéressante consiste à filmer les oscillations de la lame. Le signal prélevé par un capteur électromagnétique et amplifié puis appliqué en vertical à l'oscilloscope.

Le repérage du temps s'effectue en modulant le Wehnelt ou en utilisant un oscilloscope à deux spots.

Le balayage horizontal est supprimé et la bande sensible défile devant l'écran.

FIG.5

DEFAUT D'ISOCHRONISME DE LA LAME

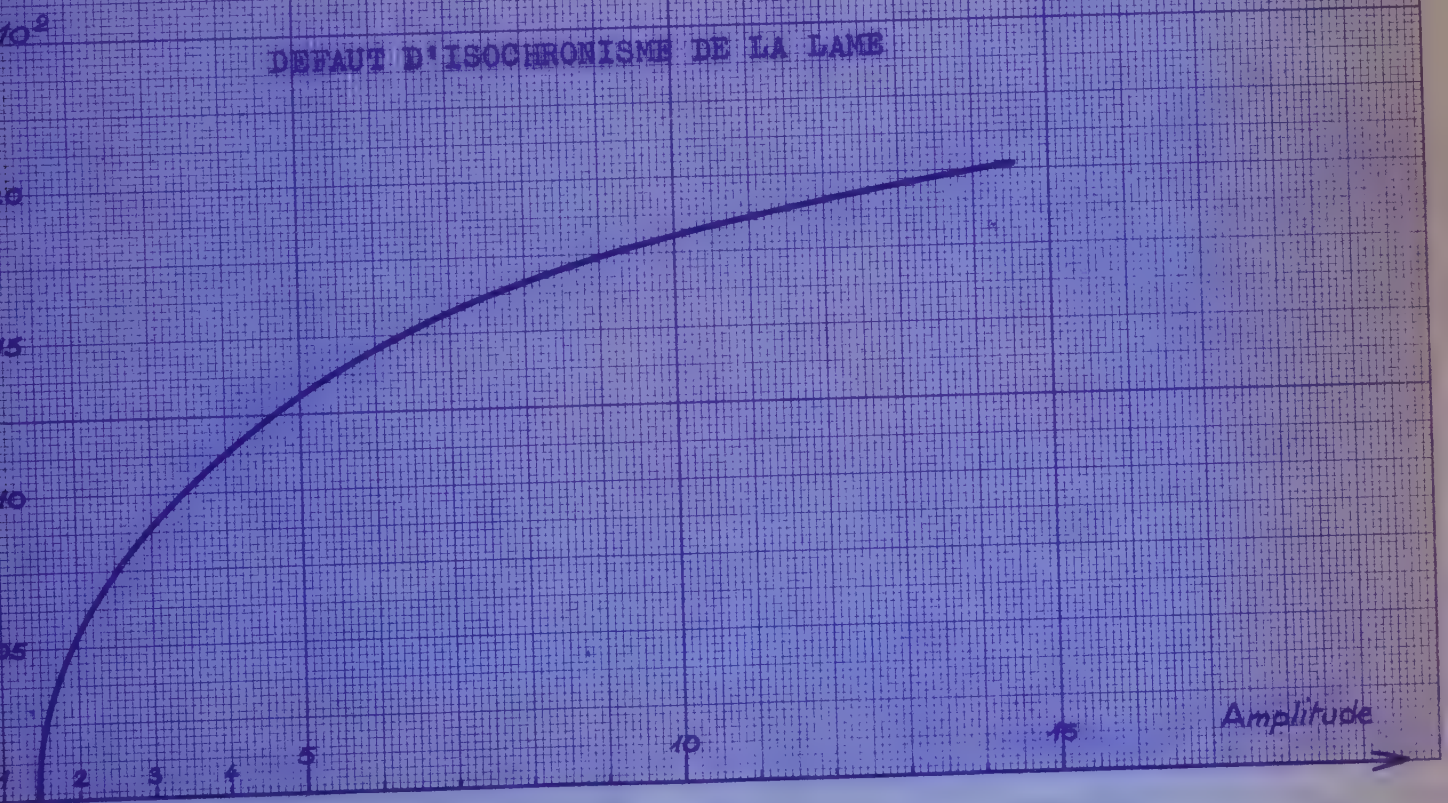
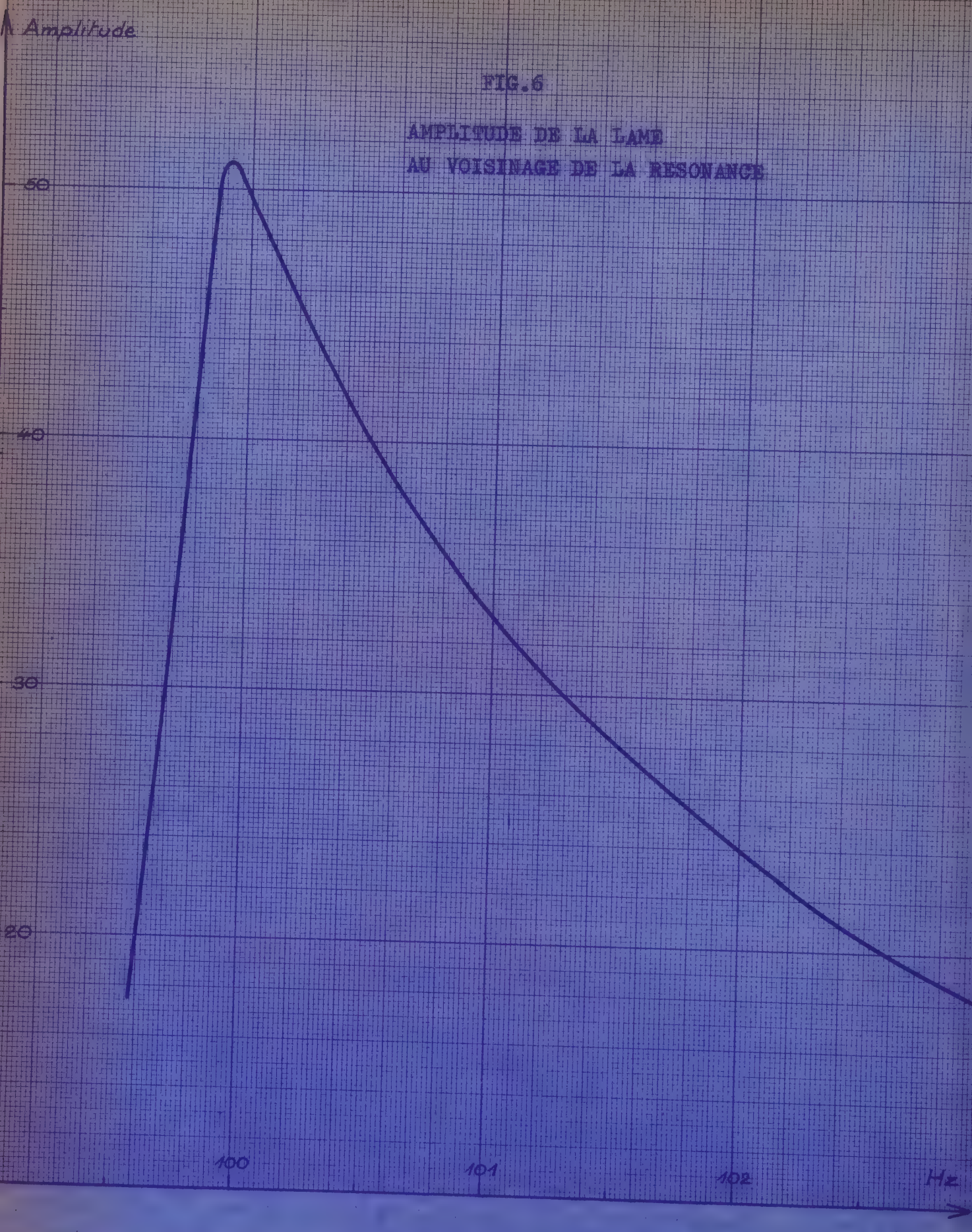


FIG.6

AMPLITUDE DE LA LAME
AU VOISINAGE DE LA RESONANCE



Lame vibrante fréquence f = 100 Hz

Repérage du temps par 1000 Hz étalon (quartz)

Vitesse de défilement du film ≃ 500 mm/sec

On peut apprécier sur une dizaine d'oscillations de la lame les écarts de fréquence de 5/1000.

Pour deux essais (fig.5)

Amplitude Sur 10 oscillations	13,5	3,5	2	1,5
T moyen x 10^2	1,025	1,010	1,010	1,005

Amplitude Sur 10 oscillations	14	6,5	4	2,5	2	1,5
T moyen x 10^2	1,020	1,015	1,010	1,010	1,005	1,000

3/Courbe de résonance de la lame (fig.6)

On attaque la lame au droit de l'entrefer par un excitateur électromagnétique. L'amplitude des oscillations est captée à son autre extrémité et relevée à l'oscilloscope.

La fréquence du générateur d'excitation est déterminée avec précisions à l'aide d'un compteur électronique.

Le couplage direct entre excitateur et capteur est difficile à réduire par suite de la petitesse de la lame. Comme on opère sur de petites variations de fréquence autour de la résonance, le couplage varie très peu et les mesures doivent être valables.

Par contre il nous a été impossible de déterminer les amplitudes correspondant à chacun des différents harmoniques, les couplages parasites augmentant rapidement avec la fréquence.

On obtient toujours $\omega_o < \omega$ de régime synchronisé de l'échappement. L'amplitude à la résonance ω_o étant supérieure à celle du régime synchronisé le défaut d'isochronisme tend à accentuer l'écart entre ω_o et ω dû au principe de fonctionnement de l'échappement magnétique.

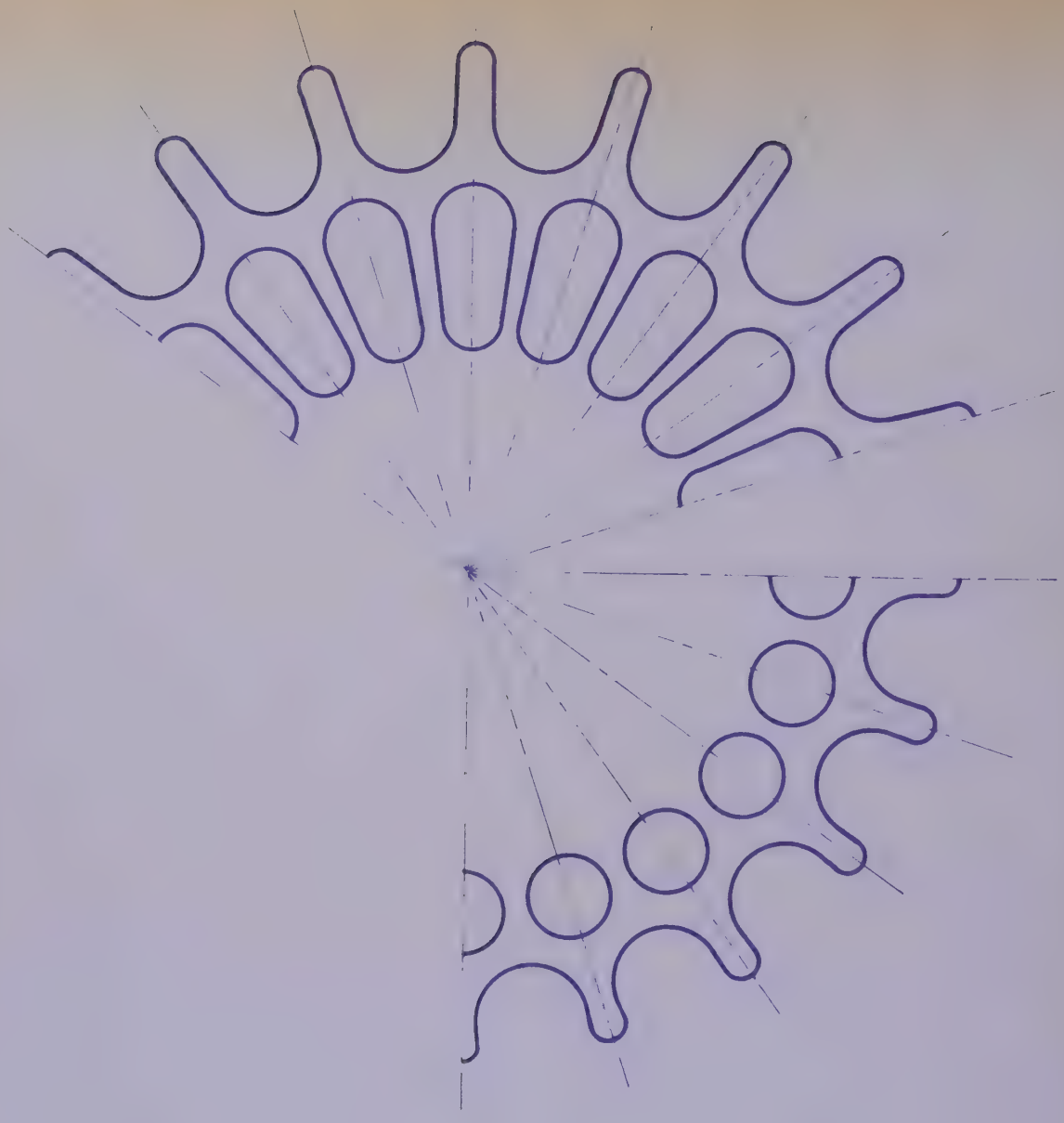
B - Echappement en fonctionnement.

1/ Examen au stroboscope.

a/ La vitesse de rotation de la roue n'est pas uniforme. Les fluctuations observées correspond nt à des fréquences supérieures à f. Il est difficile de les déterminer.

Un capteur électromagnétique en U, c'est-à-dire de forme analogue à l'aimant est placé à cheval sur la roue d'échappement. Le signal obtenu est à peu près sinusoïdal. Une analyse harmonique ne donne pas de résultats exploitables, le capteur pouvant amener autant de distorsion que la roue.

FIG. 7 A



Repère	Nombre	Désignation	Matière	Observations
		2 types de réalisation JUNGHANS	20 dents	mumétal

INSTITUT DE CHRONOMÉTRIE, BESANÇON

ROUE D'ECHAPPEMENT

Echelle : 10		Visa	Par
			Le

b/ On observe très bien le déphasage entre la roue d'échappement et la lame vibrante. Il est croissant avec le couple moteur C_m et voisin de $\pi/2$ à C_m maximum.

c/ Sur le modèle étudié la lame vibre à 100 Hz et la roue porte 20 "dents". Si l'accrochage de la lame n'a pas lieu lorsque la roue tourne à environ 5t/sec, la vitesse de celle-ci continue à croître.

Si elle peut atteindre 100t/sec (degré d'armage du barillet, état des huiles etc...) on observe alors une amorce d'oscillations de la lame vibrante. Dans ce cas il se produit un choc entre roue et lame (pointes de dents contre le cavalier de la lame) et la roue repart à vitesse nulle. On a alors de nouveau possibilité d'accrochage.

Ce phénomène nous a d'abord semblé dû à la résonance d'un élément de la lame sur l'harmonique 20. Cependant il semble plus probable qu'il provienne de la présence d'un mal rond de la roue d'échappement. Il se produit sur les cinq modèles étudiés et tous présentent une excebtration assez notable. Il est d'autant plus marqué que la roue est excentrée.

2/ Courbes de marche.

Le profil de découpe de la roue d'échappement n'est pas une sinusoïde parfaite (fig 7A)

En particulier, la lame vibrante rencontre sur la roue plus de métal au voisinage de sa position d'équilibre.

a/ Faisons une représentation schématique de la piste (fig 7B). Soient des éléments métalliques supplémentaires localisés au voisinage des zéros d'amplitude. Cherchons l'influence de ces éléments sur la marche.

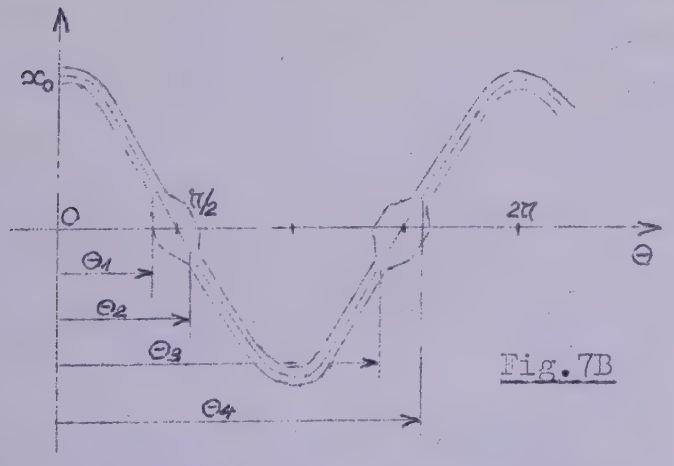


Fig. 7B

Ils créent un gradient du champ et des forces plus importantes entre θ_1 et $\pi/2$, $\pi/2$ et θ_2.

Soit $x = x_o \cos(\omega t+\varphi)$ l'équation du mouvement entretenu de la lame vibrante.

De θ_1 à $\pi/2$ l'élément métallique est moteur (en réalité, l'effet se localise sur une petite plage autour de θ_1 mais cela ne modifie pas le résultat).

De $\pi/2$ à θ_2 l'élément métallique est résistant

θ_3 à $3\pi/2$ " " moteur

$3\pi/2$ à θ_4 " " résistant

Evaluons la marche correspondante au moyen de la formule d'Airy

$$M_C = \frac{B}{x_o}\int_0^{2\pi} P \cos(\omega t+\varphi)\,d(\omega t) \qquad \text{avec } B = \frac{43\,200\,T^2}{\pi^3 M}$$

P force perturbatrice (supposée constante) ; $P = |k_1|$

$$M_C = \frac{B}{x_o}\left[-k_1\int_{\theta_1}^{\pi/2}\cos(\theta+\varphi)d\theta + k_1\int_{\pi/2}^{\theta_2}\cos(\theta+\varphi)d\theta + k_1\int_{\theta_3}^{3\pi/2}\cos(\theta+\varphi)d\theta - k_1\int_{3\pi/2}^{\theta_4}\cos(\theta+\varphi)d\theta\right].$$

Si $\theta_1 = 2\pi-\theta_4$ $\quad$ $\theta_2 = 2\pi-\theta_3$ $\quad$ $M_C = -\frac{4k_1B}{x_o}\cos\varphi(1-\sin\theta_1)$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 \; ; \quad 1 - \sin\theta_1 > 0$$

donc $M_C < 0$ $\quad$ en chronométrie $M_C = H_o - H$ $\quad$ H_o heure exacte, H heure indiquée

en horlogerie $M_H = H - H_o$

Donc, $H_H > 0$ (sur les chronographes électroniques)

Si l'amplitude croît, M_H décroît, donc retard aux grandes amplitudes.

Remarque : Il est certain qu'en réalité la marche n'est pas une fonction harmonique de l'amplitude mais une fonction de la forme $\frac{B}{x_o^{\alpha}}$ avec $\alpha > 0$.

b/ On dispose des éléments magnétiques supplémentaires au voisinage des maximum d'amplitude de la lame vibrante.

C'est-à-dire de la même façon que précédemment, mais cette fois :

De 0 à θ_1 cet élément est résistant
θ_2 à π " " moteur
π à θ_3 " " résistant
θ_4 à 2π " " moteur

Marche :

$$M = \frac{B}{x_o}\left[k_2\int_0^{\theta_1}\cos(\theta+\varphi)d\theta - k_2\int_{\theta_2}^{\pi}\cos(\theta+\varphi)d\theta - k_2\int_{\pi}^{\theta_3}\cos(\theta+\varphi)d\theta + k_2\int_{\theta_4}^{2\pi}\cos(\theta+\varphi)d\theta\right].$$

avec $\theta_1 \simeq \pi - \theta_2 \simeq \theta_3 - \pi \simeq 2\pi-\theta_4$

$$M_C = \frac{E}{x_o}\sin\theta_1\cos\varphi = \frac{E}{x_o^2}(x_o^2 - x_1^2)^{1/2}\cos\varphi \text{ avec } E = \text{cte}$$

$M_H < 0$ et on crée ainsi de l'avance aux grandes amplitudes.

c/ Courbes de marche.

Elles ont été relevées sur un isochronographe GREINER
On se reportera aux différentes courbes suivant la numérotation.

Figure 8A.

Couple moteur sur le barillet pendant le désarmage. Ce diagramme permet si besoin est de traduire en couple les marches relevées en fonction du nombre de tours d'armage.

Le barillet est à +24 heures pour 4 tours d'armage.

Figure 8B.

Marche d'un réveil JUNGHANS relevée sans aucune modification sur le mouvement, c'est-à-dire tel qu'il nous est parvenu.

La marche globale pour 24 heures est de l'ordre de 1 à 2 mn. De -7 à -5 tours (0 correspondant au remontage maximum), donc à faible amplitude, l'influence de l'échappement est prépondérante. De -5 à 0 le défaut d'isochronisme de la lame et l'influence du profil de la piste ondulée apparaissent.

Correcteur de marche (cf. photos)

A l'extrémité de l'aimant et dans un plan perpendiculaire à celui-ci, est placée une palette métallique en forme de U ; son axe est situé dans le plan de repos de la lame. Chaque branche de la palette se trouve au voisinage de la lame lorsque celle-ci atteint un maximum d'amplitude (Brevet 6).

Cette palette agit ainsi comme deux éléments métalliques surabondants qui seraient placés aux maximum d'amplitude de la roue (cf. b précédent).

Ce dispositif modifie également l'amplitude par diminution du couplage et augmentation de l'amortissement.

Figure 9A.

Marche d'un mouvement en fonction de l'armage avec distance correcteur-aimant comme paramètre.

Le déplacement du correcteur modifie le couplage. Les courbes de marche tout en changeant d'allure se translatent en bloc.

De 1 vers 6 on rapproche le correcteur (au moyen d'un petit chariot rajouté et visible sur la photographie. On peut ainsi arriver à une marche faible (en 5).

Figure 9 A'.

Mêmes courbes que 9A mais avec un autre réveil. En 4 on a réalisé une correction très satisfaisante.

Figure 9 B.

Marche en fonction de l'amplitude de la lame vibrante. Position du correcteur comme paramètre. Les positions 1 à 6 identiques à celles de 9A.

Figure 9 C.

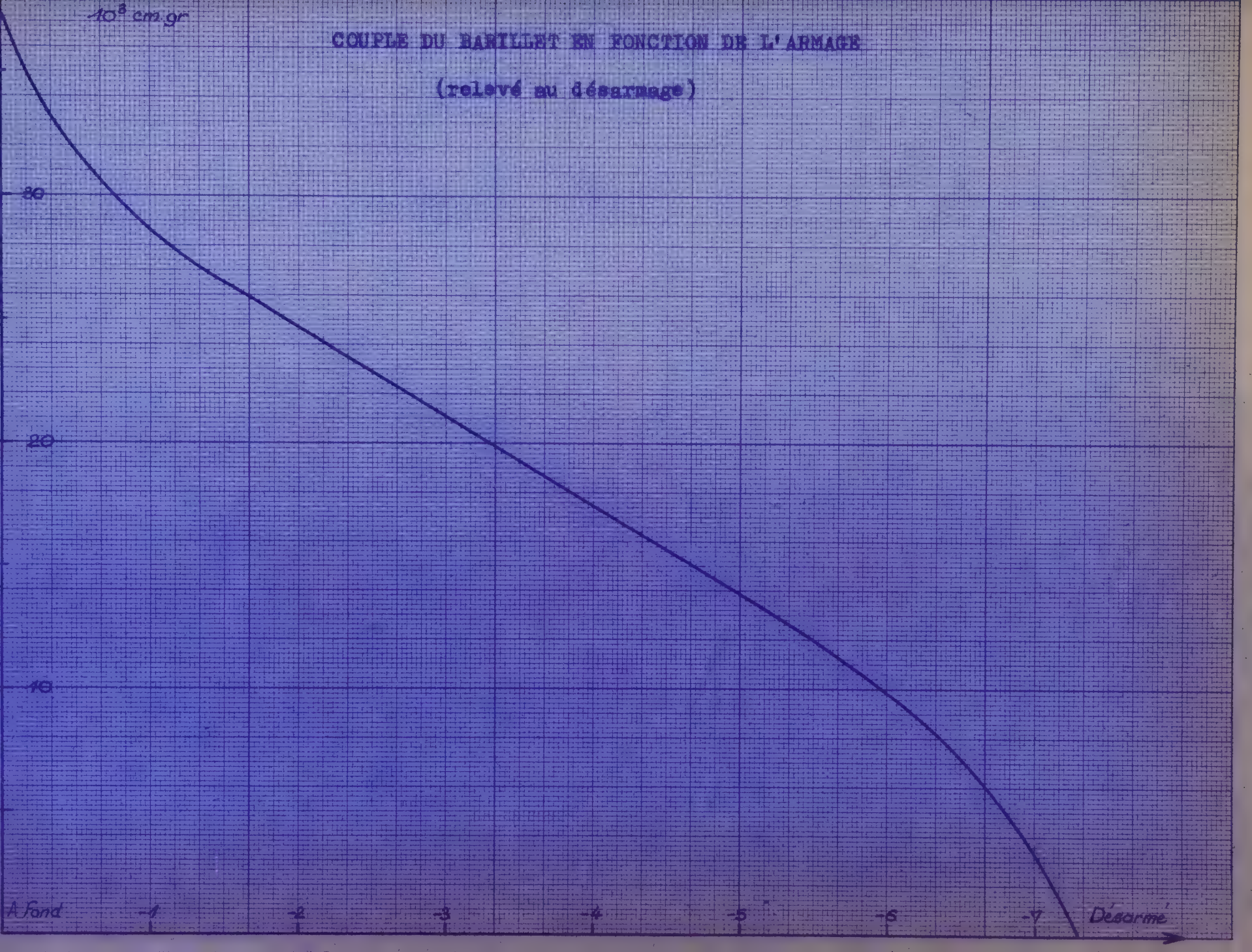
Marche en fonction du couple pour 9 A.

Shunt magnétique de réglage fin de période.

Un noyau métallique monté sur une vis solidaire de la platine est placé en bout de lame côté entrefer (voir photo) (Brevet 5).

COUPLE DU BARILLET EN FONCTION DE L'ARMAGE

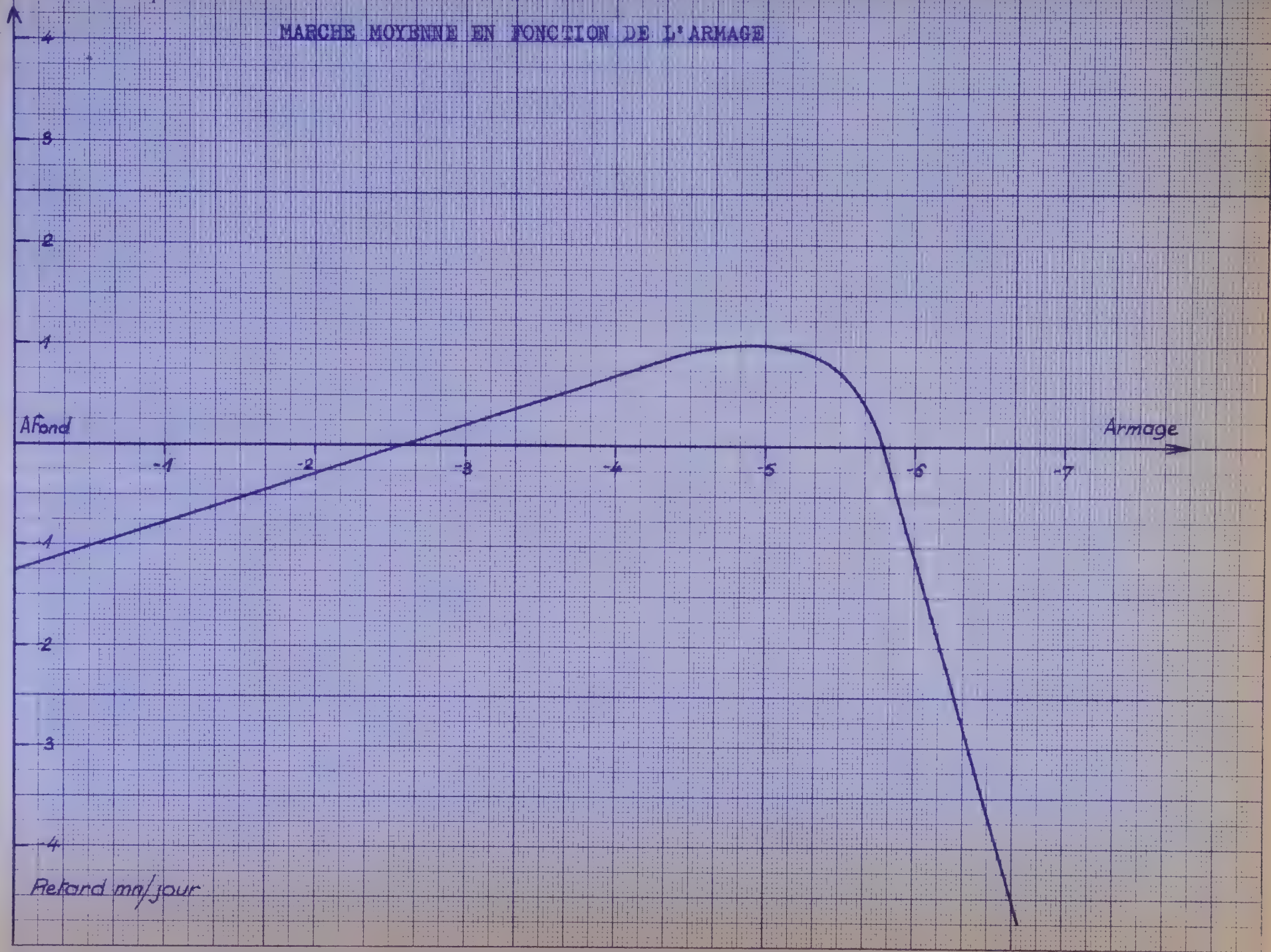
(relevé au désarmage)



Avance mn/jour

FIG. 3

MARCHE MOYENNE EN FONCTION DE L'ARMAGE

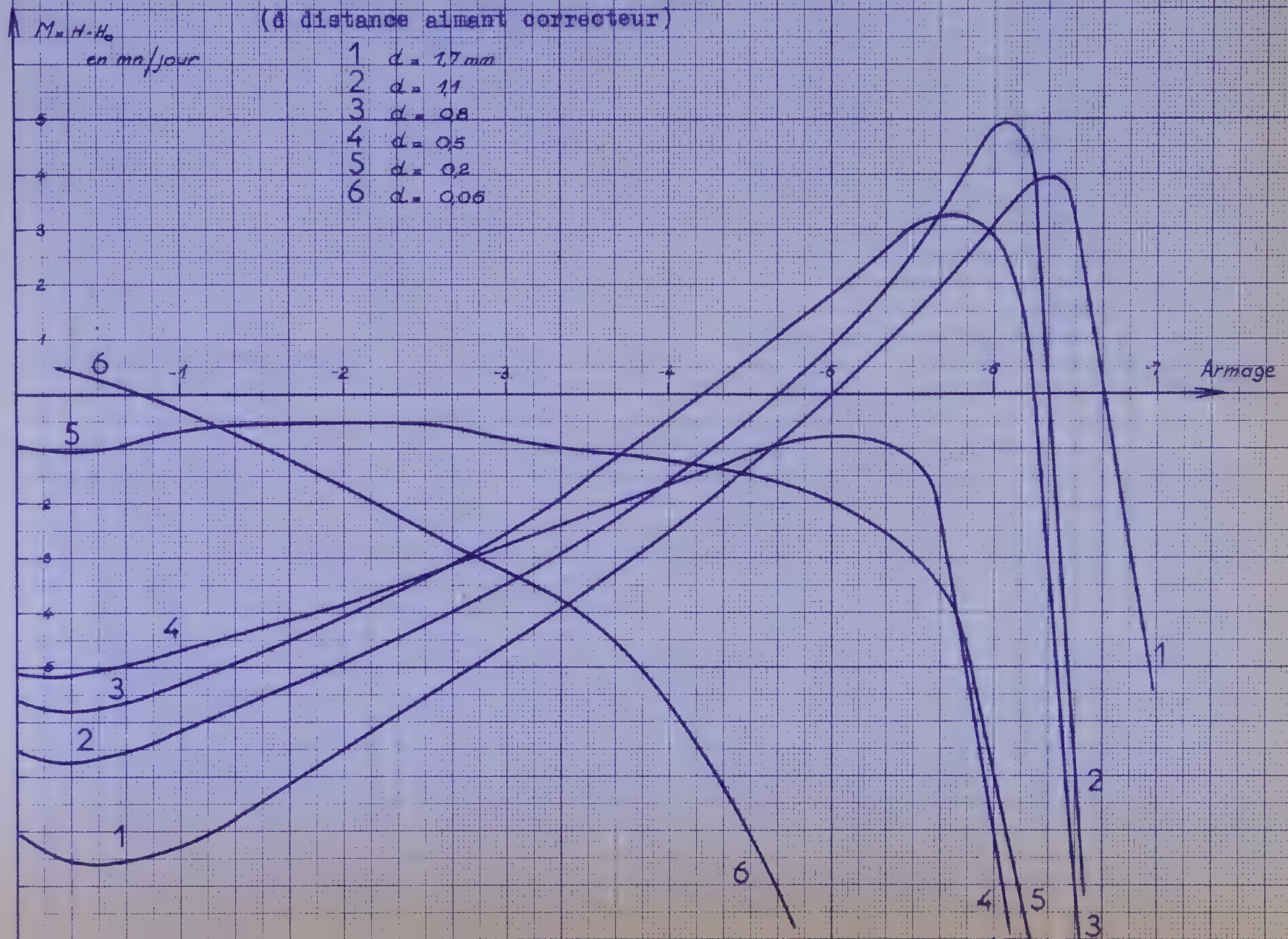


MARCHE EN FONCTION DE L'ARMAGE

CORRECTEUR D'ISOCHRONISME MOBILE

(d distance aimant correcteur)

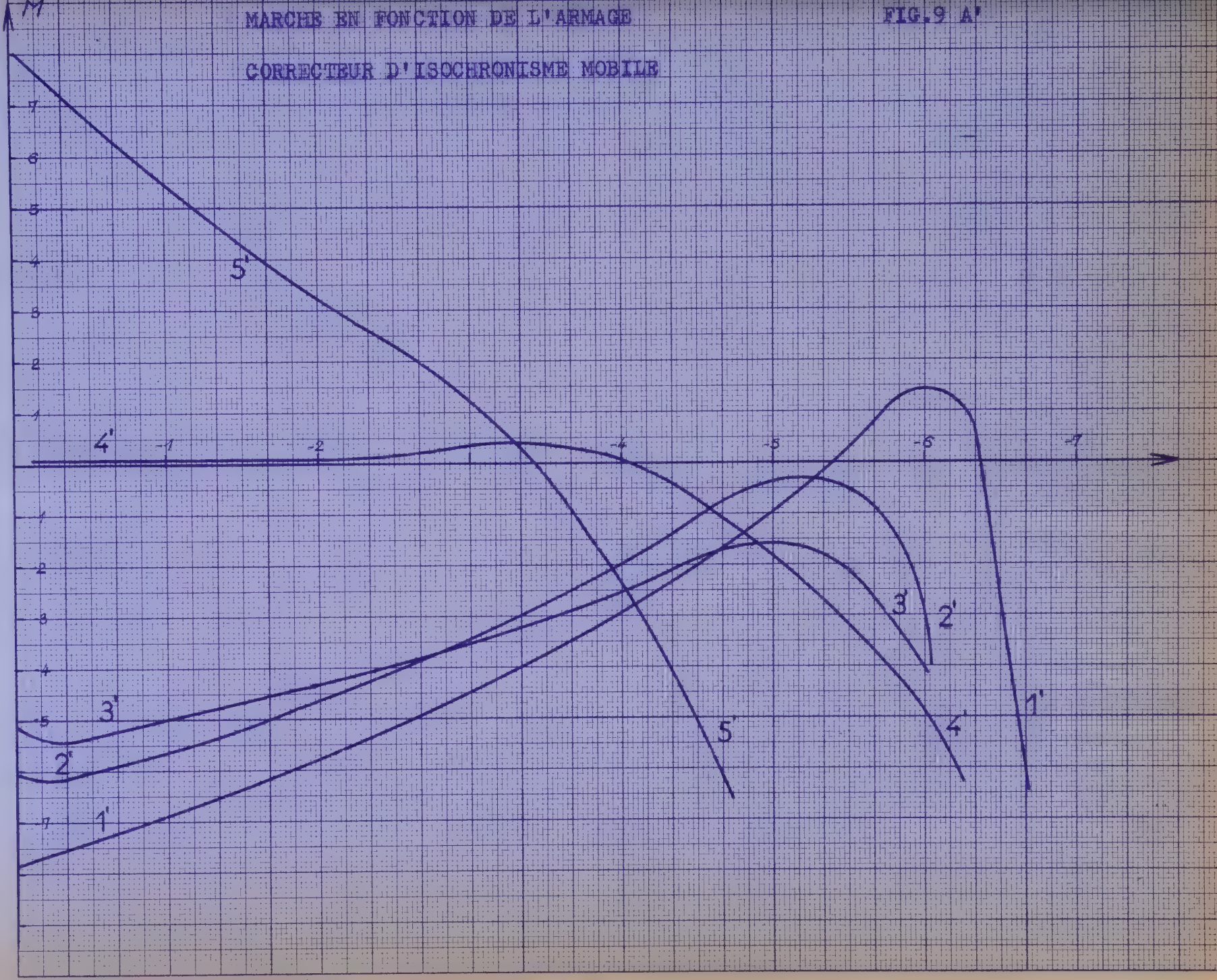
1 d = 1,7 mm
2 d = 1,1
3 d = 0,8
4 d = 0,5
5 d = 0,2
6 d = 0,06



MARCHE EN FONCTION DE L'ARMAGE

CORRECTEUR D'ISOCHRONISME MOBILE

FIG.9 A'



MARCHE EN FONCTION DE L'AMPLITUDE

CORRECTEUR D'ISOCHRONISME MOBILE

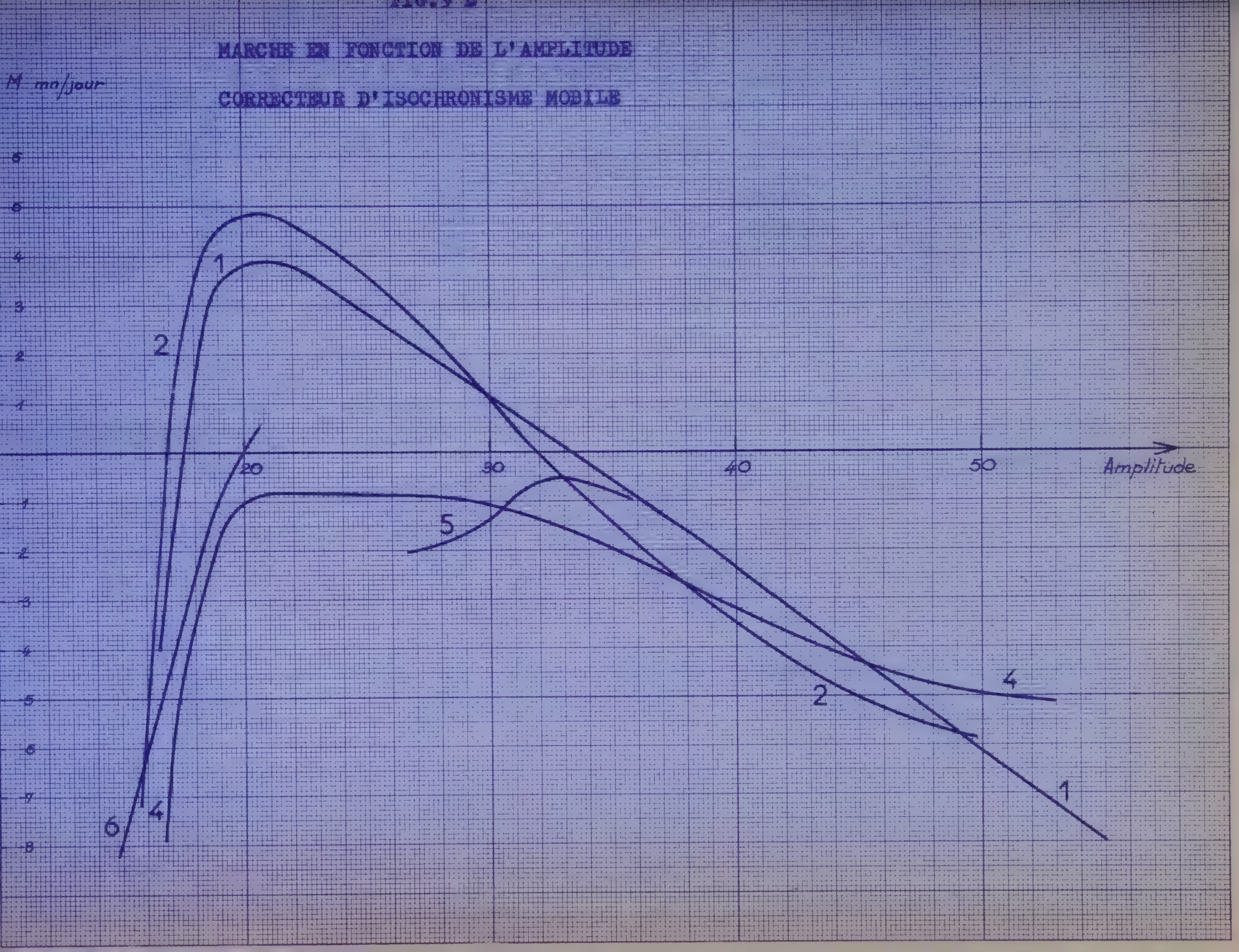


FIG.9 C

MARCHE EN FONCTION DU COUPLE MOTEUR

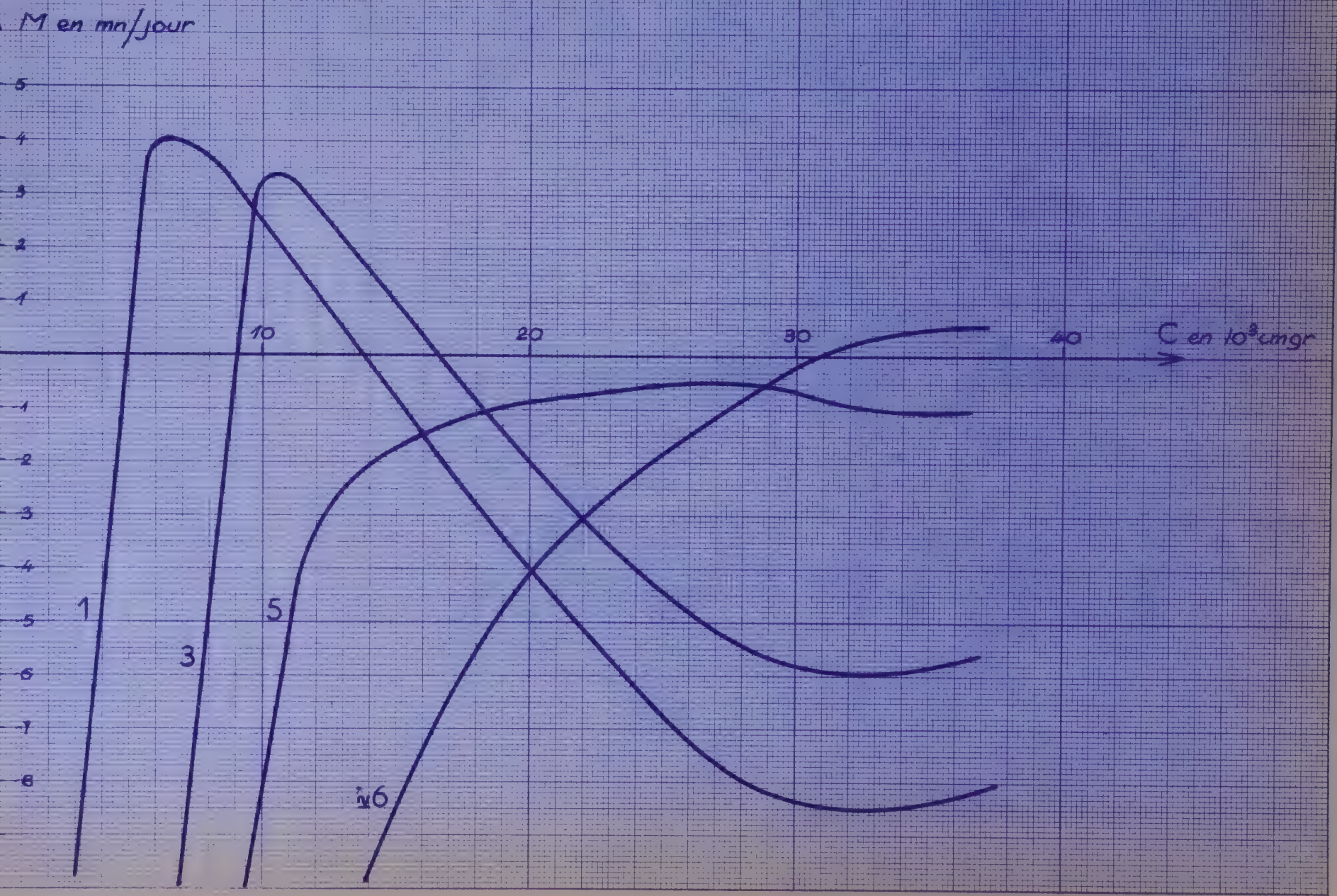


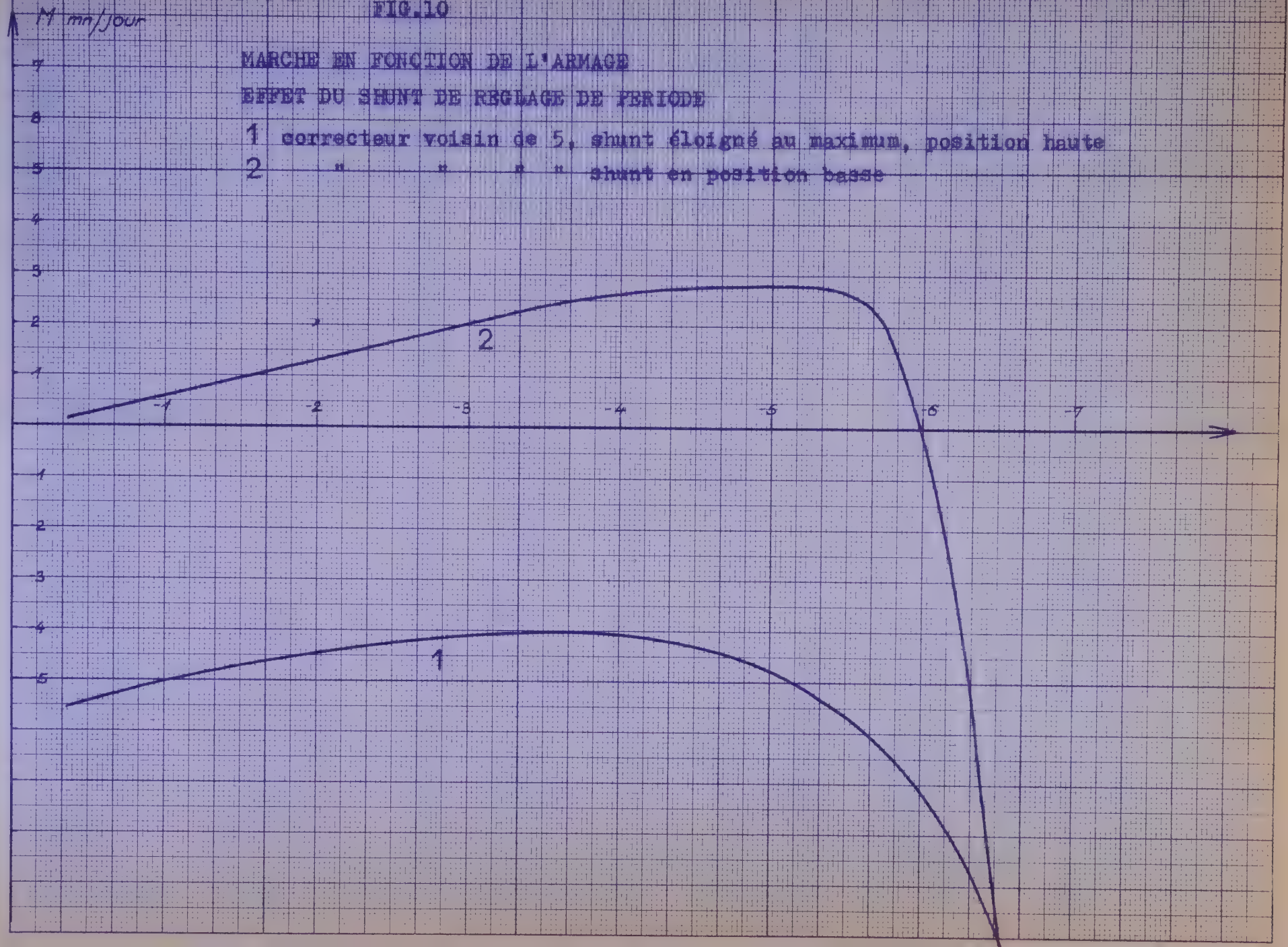
FIG.10

MARCHE EN FONCTION DE L'ARMAGE

EFFET DU SHUNT DE REGLAGE DE PERIODE

1 correcteur voisin de 5, shunt éloigné au maximum, position haute

2 " " " " shunt en position basse



Sa descente provoque de l'avance. Il modifie l'action de l'aimant : diminution de son freinage par dérivation du champ.

Sur le Réveil JUNGHANS réglé en position moyenne, son déplacement donne ± 3 mn/jour.

Ce noyau est placé dans le plan de repos de la lame. Il tend donc à s'opposer à l'action du correcteur de marche mais modifie très peu l'action de ce dernier.

La figure 10 illustre son effet, correcteur en position voisine de 5. Le coude des courbes de marche est un peu décalé sur la droite (ce qui est favorable) lorsqu'il se trouve en position basse extrême.

AUTRES PROCEDES D'UTILISATION DU COUPLAGE MAGNETIQUE ENTRE ROUE ET LAME

Nous ne parlerons pas des nombreuses variantes détaillées dans les brevets pris par la Sté HORSTMANN CLIFFORD, la plus élégante étant certainement celle utilisée actuellement.

Fonctionnement en compteur.

On peut entretenir la lame vibrante par des procédés classiques (tubes ou transistors) et compter les oscillations par une roue d'échappement du type précédent (Brevet 4).

Il importe d'adapter convenablement les impédances mécaniques de façon à perturber au minimum les oscillations de la lame. Ce dispositif présente l'avantage d'assurer une démultiplication importante (on pourrait la porter à 50 ou 100, ce n'est qu'une question de découpage de la roue).

On doit également rendre le système irréversible, c'est-à-dire créer des anomalies sur la roue, par exemple du type de celles représentées fig.11.

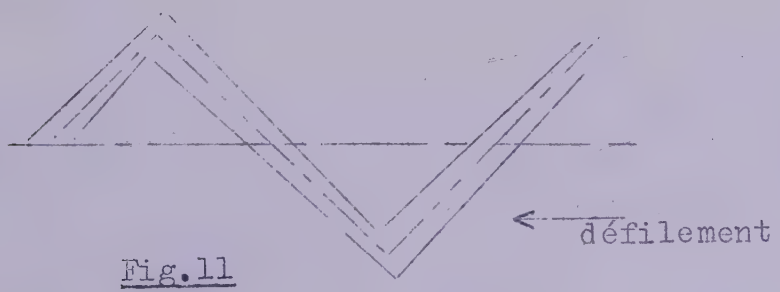


Fig.11

Amincir un bras sur deux comme proposé dans le brevet 4 ne permet pas de réaliser un sens de rotation préférentiel.

Nos essais à ce sujet n'ont pas donné de bons résultats ; nous avons toujours travaillé sur des prototypes trop petits et difficiles à réaliser avec soin. L'auto-démarrage par contre reste bien improbable.

De nouvelles expériences avec modèles de dimensions convenables seront poursuivis en ce sens à l'Institut de Chronométrie.

Suggestions.

1/ Une meilleure marche doit pouvoir être obtenue par modification progressive du profil de la roue d'échappement. Il semble surtout que dans les réalisations actuelles, on a cherché la simplicité de fabrication plutôt qu'une forme obtenue par tâtonnements expérimentaux et donnant une marche faible.

Par exemple, en cherchant à communiquer à la lame vibrante des impulsions motrices au voisinage du point mort, on devrait obtenir un meilleur isochronisme sans compromettre l'accrochage des vibrations.

Soient F_1 le module de l'impulsion au voisinage de $\Theta=0$ et $\Theta=\pi$

F_2 " " $\Theta = \pi/2$ et $\Theta = 3\pi/2$

avec $x = x_0 \cos(\omega t+\varphi)$ et $\omega t = \Theta$

Marche.

$$M = \frac{B}{x_0}\Big[-F_2 \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \cos(\Theta+\varphi)d\Theta + F_2 \int_{\Theta_3}^{\Theta_4} \cos(\Theta+\varphi)d\Theta - F_1 \int_{-\alpha}^{0} \cos(\Theta+\varphi)d\Theta + F_1 \int_{0}^{+\alpha} \cos(\Theta+\varphi)d\Theta + F_1 \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \cos(\Theta+\varphi)d\Theta - F_1 \int_{\pi}^{\pi+\alpha} \cos(\Theta+\varphi)d\Theta \Big]$$

si $\Theta_2 = \pi-\Theta_1$ et $\Theta_4-2\pi = \pi-\Theta_3$

$$= \frac{B}{x_0}\Big[4F_2 \sin\varphi \cos\Theta_1 - 4F_1 \sin\varphi(1-\cos)\Big]$$

$\alpha = 0$

$\Theta_1 = \pi$ $\quad M = 0$ au second ordre près

Des essais sont poursuivis dans ce sens.

2/ La lame vibrante présente un défaut d'isochronisme important. L'utilisation d'un élinvar particulier doit permettre de l'améliorer.

3/ Réflexions concernant le brevet 7.

L'auteur souligne que la rotation de la roue d'échappement n'est pas uniforme et qu'il s'y superpose des vibrations.

Cet effet a été remarqué en 1910 par H.BOUASSE [1]

Toujours d'après l'auteur, les vibrations parasites signalées correspondent au 1/2, 1/3, ..., 1/10 et même 1/20 du fondamental. Nous n'avons jamais constaté de telles fluctuations. En particulier les harmoniques 2 et 3 existent et sont plus ou moins marqués selon le profil de la roue utilisée.

Le volant d'inertie monté à friction sur la roue contribue à les atténuer. Il facilite surtout l'accrochage et élargit la plage du couple moteur admissible. Ce dispositif a également été proposé par H.BOUASSE (Pendule Spiral Diapason II p.346)

Conclusion.

Un esprit critique "découvrira" toujours dans les publications anciennes des mécanismes qu'il qualifiera de similaires ou identiques. En ce sens l'imagination est assez fertile. Il n'en est pas moins vrai que l'invention de M. CLIFFORD est simple, efficace et intéressante.

Les résultats assez décevants obtenus initialement (marche trop importante, décrochage dû à des chocs ou la ... sonnerie etc) ont été nettement améliorés et permettent d'entrevoir des réalisations futures de qualité comparable ou supérieure aux échappements classiques actuels.

BIBLIOGRAPHIE

Brevets pris en France par la Sté HORSTMANN CLIFFORD MAGNETICS Ltd, England.

(1) Gr 12 Classe 1 n°946.519 demandé le 10 mars 1947
(2) Gr 12 Classe 1 n°961.064 " 12 février 1948
(3) Gr 12 Classe 1 n°987.840 " 7 juin 1949
(4) Gr 12 Classe 3 n°991.060 " 21 juillet 1949
(5) Gr 12 Classe 1 n°1.057.057 " 12 mars 1952
(6) Gr 12 Classe 1 n°1.044.830 " 12 juillet 1951
(7) Gr 12 Classe 1 n°1.113.932 " 3 novembre 1954
(8) Classification internationale G04 d 1.206.758 demandé le 7 mai 1958

Articles.

The magnetic escapement applied to pendulum clocks by CF CLIFFORD - Horological Journal April 1948 - England.

Brevet amériaain.

(Petite variante du dispositif CLIFFORD)- United States Patent Office 2.724.235. Patented : 22 novembre 1955 et intitulé :

Magnetic clock movement, par Kurt BAUERLE, pris en Allemagne par la Sté JUNGHANS

Brevet antérieur.

Régulateur de marche magnétique sans friction pour mouvement d'horlogerie. Gr 12, Classe 1, n°891.764 demandé le 3 décembre 1942 par R.STRAUMANN

Ouvrages généraux.

[1] H.BOUASSE - Pendule Spiral Diapason tome II p.170 et 296 - Librairie Delagrave.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse tome XXVII (1913) p.269-287 qui renvoie aux Comptes-Rendus de la 39ème session de l'Association Française pour l'avancement des Sciences.

[2] Y.ROCARD - Dynamique générale des Vibrations p.240 (ancienne édition) Editions Masson.

[2] Lord RAYLEIGH - Théorie du son. 2ème édition. Volume 1. pp.111 et 287 - Macmilan Londres.

" S.TIMOSHENKO - Théorie des Vibrations. 2ème édition. Ch.I pp.86-91 Béranger Paris 1947

" R.CHALEAT - Détermination théorique et expérimentale de la fréquence propre d'un diapason à lames minces - Annales françaises de Chronométrie. 1er trimestre 1959.

-:-:-:-:-

Deuxième thèse

Proposition donnée par la Faculté

Algèbre de BOOLE

Applications aux circuits électriques et électroniques

-:-:-:-:-